

Несчетность множества точек отрезка через лемму о вложенных отрезках

Старое док-во:

- 1) от противного - пусть счетно, т.е. пусть все точки на отрезке можно перенумеровать
- 2) сами точки отрезка будем представлять точками отрезка $[0;1]$, записанным для удобства в двоичной системе счисления: каждая точка будет иметь примерно такой вид:
 $0,00101011001000000000000001$

ноль целых и бесконечный хвост нулей и единиц после запятой (возможно периодический)

Перенумеруем их

- 1) $0,001000101110001100$
- 2) $0,001000100100111001$
- 3) $0,011001100110111001$
- 4) $0,110000011010100111$
- 5) $0,001001001110001001$
 $0,11011$

Рассмотрим число, которое в первой позиции после 0 отличается от 1-ого, во 2-ой позиции - от 2-ого числа и так далее. Значит оно отличается от всех, а номер мы ему не дали. Противоречие

Пусть точек на отрезке счетно, тогда пронумеруем их все: x_1, x_2, x_3, \dots

Построим вложенную систему отрезков: d_1, d_2, d_3, \dots

Таким образом, что отрезок d_1 не содержит точку x_1 , отрезок d_2 не содержит точку x_2, \dots

У этой системы отрезков найдется общая точка Y , которая не совпадет ни с одной точкой x_k , т.к. если бы Y совпала с x_k , то x_k не попала бы в отрезок d_k

