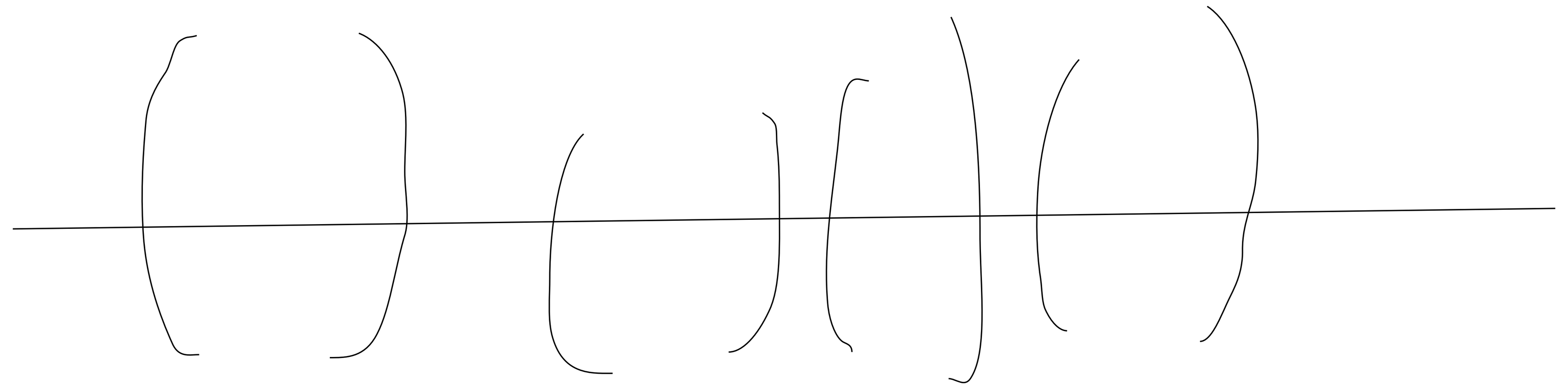
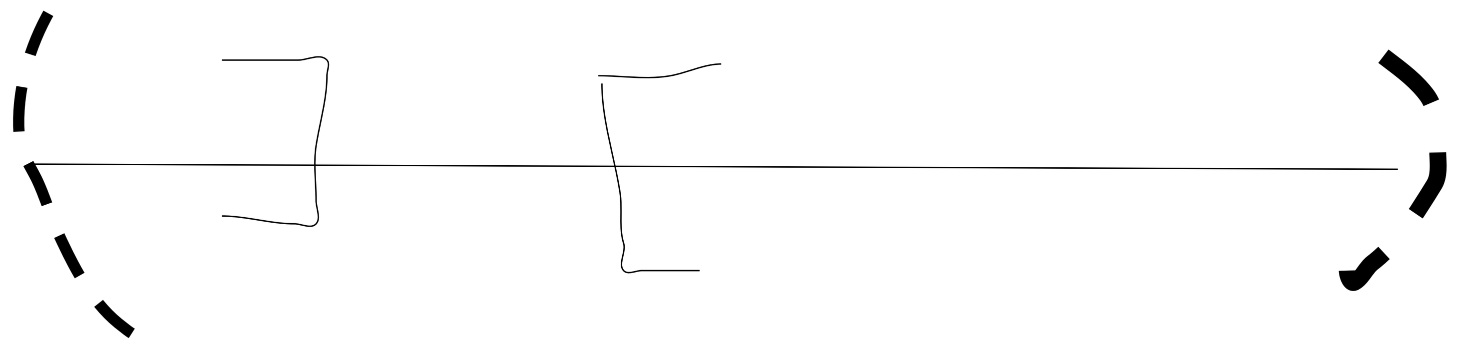
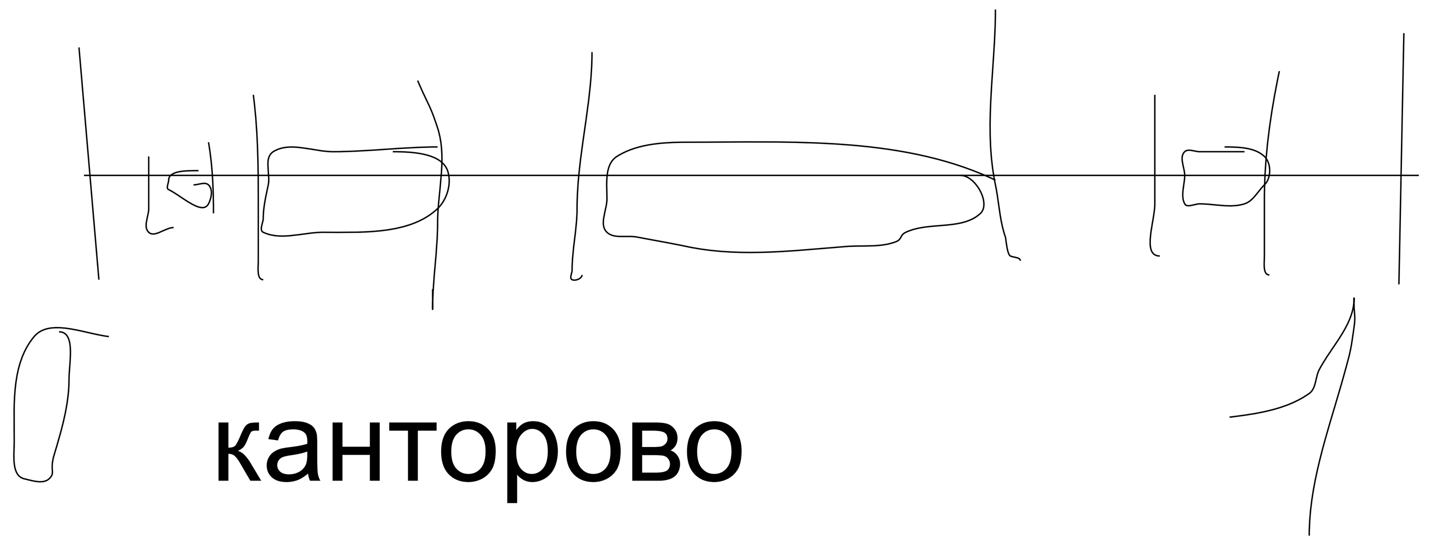
Докажите, что дополнение к замкнутому множеству (то есть множество всех точек, не входящих в это множество) есть множество открытое, а дополнение к открытому множеству - множество замкнутое.

Бурбаки

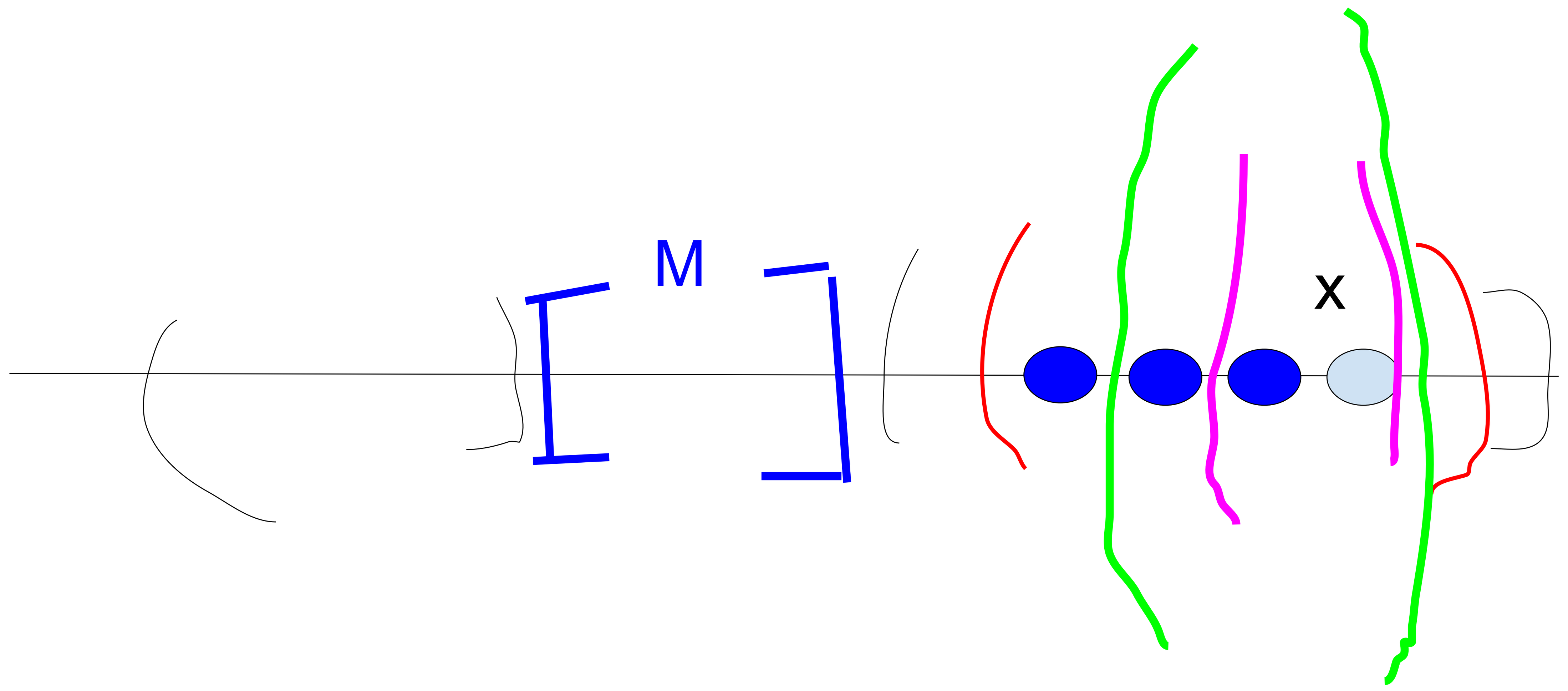




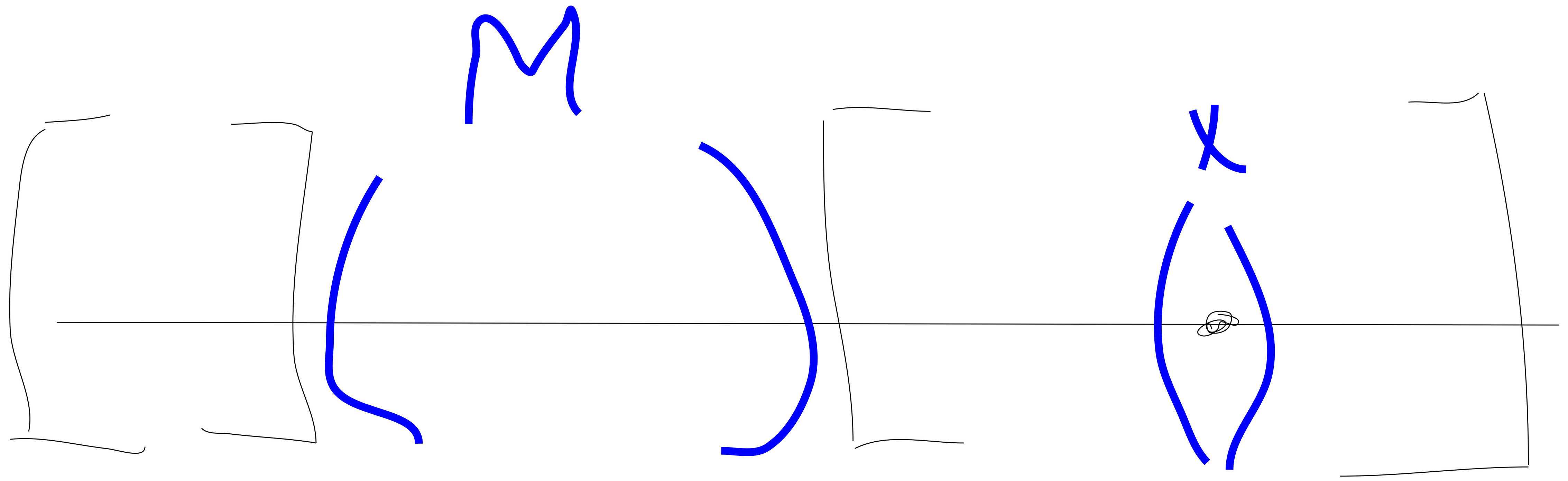


канторово множество

Пусть есть замкнутое множество M.
Рассмотрим его R\M. Пусть R\M не открытое, тогда найдется такая точка x э R\M, что никакая ее окрестность не лежит полностью в R\M, т.е. в ней есть точки не из дополнения к M, а значит они из самого M. И так далее строим цепочку уменьшающихся окрестностей точки x, в каждой из которых будут находиться точки из M=> точка x является предельной для множества M. Но при этом она x э R\M, а значит она не лежит в M. А значит для замкнутого множества M существует предельная точка, которая в нем не лежит. А значит множество M не замкнутое - противоречие.



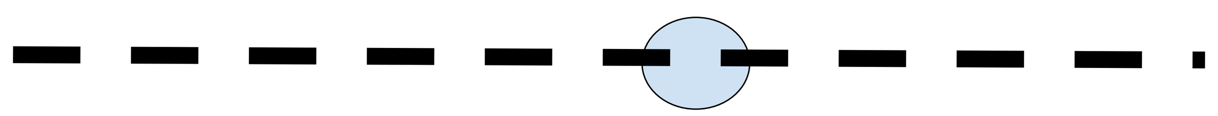
Пусть есть открытое множество M.
Рассмотрим его R\M. Пусть R\M не замкнутое, тогда найдется такая точка x, которая не лежит в R\M и является предельной для R\M. Значит хэM. Из этого следует, что найдется какая-то окрестность точки x, которая войдет в множество M.
Подумай о том, что значит предельность точки x для R\M. Это значит, что в этой окрестности должны быть точки из дополнения, а их там нет. Значит она не может для дополнения предельной => противоречие.



Закон исключенного третьего => док-во от противного

A U A’ непустое
A V A’ = 1

Аксиома Евклида



x: V o : (хэ o => E p э M=> p э o)=> x э M

M - замкнуто ⇔ точки x предельной для M => x э M

M - не замкнуто ⇔ точка x предельной для M => x !э M