

### Задача 1.

Докажите, что найдется такое натуральное число  $p$ , что для любого натурального  $k$ , большего  $p$ ,  $1000 \cdot 2^k < k!$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot k =$$

$$1000 \cdot 2^k = 1000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 =$$

$p = 1000$ , а может и меньше

### Задача 2.

Докажите, что найдется такое натуральное число  $p$ , что для любого натурального  $k$ , большего  $p$ ,  $k^2 < 2^k$

$$k^k =$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$$

$$k=1: \quad 1 \cdot 1 < 2$$

Пусть верно при  $k$ , докажем, что верно при  $k+1$ :  $(k+1)^2 < 2^{k+1}$        $k^2 + 2k + 1 < 2^k \cdot 2$        $k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2^k$

$2k + 1 < 2^k$       пусть это верно при  $k$ , докажем, что верно при  $k+1$ :  $2^{k+1} + 1 < 2^{k+1}$        $2k + 3 < 2^k + 2^k$        $2 < 2^k$

$$k^{10} < 2^k \quad | \quad \forall_{10}$$
$$k < 2^{(k/10)}$$

### Задача 3.

Докажите, что найдется такое натуральное число  $p$ , что для любого натурального  $k$ , большего  $p$ ,  $k^{10} < 2^k$

$$k = 1024$$

$$1024^{10} = (2^{10})^{10} = 2^{100} \quad ; \quad 2^{1024} \quad 2^{100} < 2^{1024} \quad ; \quad k = 2048 \quad 2^{110} \quad ; \quad 2^{2048}$$

Пусть верно при  $k$  (  $k < 2^{(k/10)}$  ), докажем, что верно при  $k+1$ :

$$(k+1) < 2^{((k+1)/10)}$$

$$k+1 < 2^{(k/10)} \cdot 2^{(1/10)}$$

$$k+1 <$$

$$k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k \cdot k^k < (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$