Задача 6. Докажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, и если числа не равны, то неравенство строгое.

Задача 7. Докажите, что среднее арифметическое n положительных чисел ($n > 2$) не меньше среднего геометрического этих чисел, и если не все числа равны, то неравенство строгое.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{a\cdot b}$$

a^2 + 2ab + b^2 >= 4ab
a^2 + b^2 >= 2ab
(a - b)^2 >= 0

Пусть некоторое условие верно при всех номерах, меньших произвольного номера n, тогда если ты докажешь что оно верно при n, то из этого следует, что оно при всех номерах

из этого следует, что условие верно при всех вообще номерах.

(a1 + a2 + … + an) / n >= [n]V(a1*a2*...*an)

1, 2, 3, …, n−1, n

1, 2, 3, …, n−1, n

1. доказать, что если наше неравенство верно для k, то оно будет верно для 2k

n — чет 2

n нечет 3 ?

нечетный случай

пусть (a1 + a2 + … + ak)/k > = [k]V(a1*a2*...*ak) k=1,,,n-1 n - нечетное
(a1 + a2 + … + an + 1)/(n+1) > = [n+1]V(a1*a2*...*an) мы добавили 1, слагаемых стало четное кол-во, то есть n+1 стало четным числом, а значит (n+1)/2 - число целое.
по нашему предположению для (n+1)/2 верно, значит по лемме верно для n+1
докажем, что верно для (a1 + a2 + … + an)/n > = [n]V(a1*a2*...*an)
(a1 + a2 + … + an + x)/(n+1) > = [n+1]V(a1*a2*...*an*x)
(a1 + a2 + … + an + x)/(n+1) = ((a1 + a2 + … + an)*n/n+x)/(n+1)
((a1 + a2 + … + an)*n/n+x)/(n+1) > = [n+1]V(a1*a2*...*an*x)
(a1 + a2 + … + an)/n >= ([n+1]V(a1*a2*...*an*x)*(n+1) - x)/n

$$x = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)}{n+1} \qquad \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n}\,\sqrt[n+1]{\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^{n+1} \geq a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^{n} \geq a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

четный случай

1. доказать, что если наше неравенство верно для k, то оно будет верно для 2k

ЛЕММА

пусть (a1 + a2 + … + ak)/k > = [k]V(a1*a2*...*ak)
докажем, что (a1 + a2 + … + ak + … +a2k)/2k >= [2k]V(a1*a2*...*a2k)
a1,...ak - произвольные числа, не обязательно совпадающие с a1….ak...a2k

подсказка (a+b)/2>=Vab - уже доказано

1 способ
((a1 + a2 + … + ak)/k + (a(k+1) + … + a2k)/k)/2 >=([k]V(a1*a2*...*ak) + [k]V(a(k+1*a(k+2)*...*a2k))/2
([k]V(a1*a2*...*ak) + [k]V(a(k+1*a(k+2)*...*a2k))/2 >= V { [k]V(a1*a2*...*ak) * [k]V(a(k+1*a(k+2)*...*a2k) }
V { [k]V(a1*a2*...*ak) * [k]V(a(k+1*a(k+2)*...*a2k) }=[2k]V(a1*a2*...a(2k-1)*a2k)

2 способ
(a1 + a2 + … + ak + … +a2k)/2k >= (Va1*a2 + Va3*a4… + Va(2k-1)*a2k)/k
(Va1*a2 + Va3*a4… + Va(2k-1)*a2k)/k >= [k]V(Va1*a2*...a(2k-1)*a2k)
[k]V(Va1*a2*...a(2k-1)*a2k) = [2k]V(a1*a2*...a(2k-1)*a2k)

Среди чисел 1,2,..., n-1 есть n/2
Для n/2 верно по предположению, а значит для n верно по лемме