

Задание Доказать неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство Рассмотрим вектор $\bar{a} + \lambda \bar{b}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Найдем скалярное произведение этого вектора на себя. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$(\bar{a} + \lambda \bar{b}, \bar{a} + \lambda \bar{b}) \geq 0$$

Раскроем скобки

$$(\bar{a}, \bar{a}) + \lambda(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda(\bar{b}, \bar{a}) + \lambda^2(\bar{b}, \bar{b}) \geq 0$$

$$\lambda^2(\bar{b}, \bar{b}) + 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$$

Получили квадратный трехчлен относительно λ , который принимает неотрицательные значения. Такое возможно, когда его дискриминант неположителен, т.е. в случае, если

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 - (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \leq 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2$$

Что и требовалось доказать.

Пример 29. Докажем, что для любых действительных чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n справедливо соотношение

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

(оно называется *неравенством Коши – Буняковского*).

Решение. Пусть m_1, \dots, m_n – какие-либо положительные числа. Выберем на числовой оси точки A_1, \dots, A_n с координатами x_1, \dots, x_n и поместим в них массы m_1, \dots, m_n . Координата центра масс м.т. $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ равна $x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$, и, согласно следствию 1, имеем (взяв момент системы относительно нулевой точки числовой оси)

$$m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2 \geq \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n$.

Положим теперь (считая, что все числа b_1, \dots, b_n отличны от нуля): $m_k = b_k^2$, $x_k = \frac{a_k}{b_k}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда из доказанного неравенства непосредственно следует неравенство Коши – Буняковского (для отличных от нуля b_1, \dots, b_n). Легко видеть, что если некоторые из чисел b_1, \dots, b_n обращаются в нуль, это неравенство остается справедливым.