Задача 6. Докажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, и если числа не равны, то неравенство строгое.

Задача 7. Докажите, что среднее арифметическое n положительных чисел ($n > 2$) не меньше среднего геометрического этих чисел, и если не все числа равны, то неравенство строгое.

(a+b)/2>=V(a*b)
(a+b)^2/4>=a*b
a^2+2ab+b^2>=4a*b
a^2+2ab+b^2>=4a*b
a^2+b^2>=2ab
a^2-2ab+b^2>=0
(a-b)^2>=0
a-b=0
a=b

simple
если некоторое утверждение верно для n - и мы сможем доказать что оно верно для n+1 - то оно будет верно для всего

n -> n+1

advanced
если некоторое утверждение верно для всех номеров меньших n - и мы сможем доказать что оно верно для n - то оно будет верно для всего

k=1,2,3,4,..,n-1 -> n

(a+b+...+c)/n>=(a*b*...*c)^1/n
(a+b+...+c)^n/n^n>=a*b*...*c
(a+b+...+c)^n/n^n>=a*b*...*c

(a1+a2+...+an)/n>=(a1*a2*...*an)^1/n

пусть верно при k
(a1+a2+...+ak)/k>=(a1*a2*...*ak)^1/k

хотим док-ть при k+1
(a1+a2+...+ak+a(k+1))/(k+1)>= ? >=(a1*a2*...*ak*a(k+1))^1/(k+1)

(a1+a2+...+ak)/(k+1)+a(k+1)/(k+1)=(a1+a2+...+ak)/(k+1)+a(k+1)/(k+1)

Лемма
пусть (a1+a2+...+an)/n >=[n]V(a1a2*...*an) верна для n, докажем что тогда она верна для 2n
(a1+a2+...+a2n)/2n >=[2n]V(a1a2*...*a2n)

док-во
(a1+a2+...+a2n-1+a2n) /2n >=[2n]V(a1a2*...*a2n)
((a1+a2)/2+...+(a2n-1+a2n)/2)/n
>=(V(a1*a2)+...+V(a2n-1*a2n))/n>=
[n]V(V(a1*a2)*...*V(a2n-1*a2n))=[2n]V(a1*a2*...*a2n)

1+2+3+...+n=(1+n)n/2
k=1 1=(1+1)1/2
пусть это верно при k, тогда докажем, что это верно при (k+1)

верно по предположению 1+2+3+...+k=(1+k)k/2

хотим док-ть
1+2+3+...+k + (k+1) = ? = (1+k+1)(k+1)/2

1+2+3+...+k + (k+1) =(1+k)k/2 + (k+1) =(k+1)[k/2+1]=(k+1)(k+2)/2

для четных n
пусть это верно для всех номеров меньших четного n, тогда, что тогда оно верно для n

пусть неравенство верно для всех k<100, докажем что оно верно для k=100[k=n]

если верно для всех, то верно для
k=1,2,3,4,....,49,50,51,....98,99
А раз верно для 50, то верно для 100 по ЛЕММЕ
по расширенной индукции неравенство доказано в четном случае

для нечетных n
пусть это верно для всех номеров меньших нечетного n, тогда, что тогда оно верно для n

пусть неравенство верно для всех k<101, докажем что оно верно для k=101 [k=n]

если верно для всех, то верно для
k=1,2,3,4,....,49,50,51,....98,99,100[n-1]

значит верно для 51 [n+1/2]-> верно для 102 [n+1]
по Лемме

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}$$

a1+a2+a3+...+an = w

(w+w/n)/(n+1)>=[n+1]V(a1*...an*w/n)
(w+w/n)/(n+1)=(w(n+1)/n)/(n+1)=w/n
w/n>=[n+1]V(a1*...an*w/n)
(w/n)^(n+1)>=a1*...an*w/n
(w/n)^n>=a1*...an
w/n>=[n]V(a1*...an)
(a1+a2+...+an)/n>=[n]V(a1*...*an)