Задача 6. Докажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, и если числа не равны, то неравенство строгое.

Задача 7. Докажите, что среднее арифметическое n положительных чисел ($n > 2$) не меньше среднего геометрического этих чисел, и если не все числа равны, то неравенство строгое. Неравенство Коши

Пример 29. Докажем, что для любых действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ справедливо соотношение

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

(оно называется *неравенством Коши – Буняковского*).

Решение. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — какие-либо положительные числа. Выберем на числовой оси точки $A_1, \ldots, A_n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ и поместим в них массы $m_1, \ldots, m_n$. Координата центра масс м. т. $m_1A_1, \ldots, m_nA_n$ равна $x = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}$, и, согласно следствию 1, имеем (взяв момент системы относительно нулевой точки числовой оси)

$$m_1x_1^2 + \ldots + m_nx_n^2 \geqslant \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n}(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n$.

Положим теперь (считая, что все числа $b_1, \ldots, b_n$ отличны от нуля): $m_k = b_k^2$, $x_k = \frac{a_k}{b_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда из доказанного неравенства непосредственно следует неравенство Коши – Буняковского (для отличных от нуля $b_1, \ldots, b_n$). Легко видеть, что если некоторые из чисел $b_1, \ldots, b_n$ обращаются в нуль, это неравенство остается справедливым.

x=(m1*x1+...+mn*xn)/ (m1+...+mn)