Задача 6. Докажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, и если числа не равны, то неравенство строгое.

Задача 7. Докажите, что среднее арифметическое n положительных чисел ($n > 2$) не меньше среднего геометрического этих чисел, и если не все числа равны, то неравенство строгое.

a,b
(a+b)/2 >= V(ab)
(a+b)^2 / 4 >= ab
(a^2+2ab+b^2) / 4 >= ab
a^2 / 4 + ab/2 + b^2 >= ab
a^2 / 4 + b^2 / 4 >= ab/2
a^2 / 4 - ab/2 +b^2 / 4 >=0
(a/2-b/2)^2 >= 0
Если a != b, то (a/2-b/2)^2 > 0

a,b,...,m
(a+b+...+m)/n >=[n]V(ab*...*m)
Пусть верно при n, докажем, что верно при n+1
(a+b+...+m)/n >= [n]V(ab*...*m)
(a+b+...+m+z)/(n+1) >= [n+1]V(ab*...*m*z)

simple
если некоторое утверждение верно для n - и мы сможем доказать что оно верно для n+1 - то оно будет верно для всего

advanced
если некоторое утверждение верно для всех номеров меньших n - и мы сможем доказать что оно верно для n - то оно будет верно для всего

n -> n+1

k=1,2,3,4,..,n-1 -> n

Лемма
пусть (a1+a2+...+an)/n >=[n]V(a1a2*...*an) верна для n, докажем что тогда она верна для 2n
(a1+a2+...+a2n)/2n >=[2n]V(a1a2*...*a2n)

(a1+a2+...+a2n)/2n=[(a1+a2)/2 + (a3+a4)/2 + … + (a2n-1+a2n)/2] / n >=
>=[V(a1a2) + V(a3a4) + … + V(a2n-1a2n)]/n >=(по предположения индукции)
>= [n]V({V(a1a2) }*{V(a3a4) }*...*{V(a2n-1a2n) })=[2n]V(a1a2*...*a2n)
лемма доказана

для четного n
пусть это верно для всех номеров меньших четного n, тогда что тогда оно верно для n
(a+b+...+m)/n >=[n]V(ab*...*m)
n - четно, n/2 - целое число и при этом n/2 < n, т.е. неравенство по предположению индукции верно и для n/2 тоже => по лемме оно верне и для самого n - четный случай доказан

для нечетного n
пусть (a1 + a2 + … + ak)/k > = [k]V(a1*a2*...*ak)
k=1,,,n-1   n - нечетное
доказать надо это
(a1 + a2 + … + an)/n > = [n]V(a1*a2*...*an)

а мы сейчас докадем вот это
(a1 + a2 + … + an + 1)/(n+1) > =
[n+1]V(a1*a2*...*an)

n+1 - четная, а значит для нее работает фокус с Леммой

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}$$

a1+a2+...+an = w
(w + w/n) / (n+1) = (wn+w) / (n(n+1) = (w(n+1)) / n(n+1) = w/n

$$\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n}\,\sqrt[n+1]{\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)}$$

(w/n)^(n+1) >=a1*...an * w/n
(w/n)^n >=a1*...an
(w/n) >=[n]V(a1*...an)
(a1 + a2 + … + an)/n > = [n]V(a1*a2*...*an)