Задание Доказать неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство Рассмотрим вектор $\bar a + \lambda \bar b$, где $\lambda \in R$. Найдем скалярное произведение этого вектора на себя. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$(\bar a + \lambda b, \bar a + \lambda b) \ge 0$$

Раскроем скобки

$$(\bar a, \bar a) + \lambda(\bar a, b) + \lambda(b, \bar a) + \lambda^2(b, b) \ge 0?$$

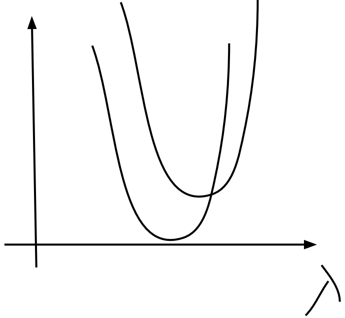
$$\underline{\lambda^2(\bar b, \bar b) + 2\lambda(\bar a, \bar b) + (\bar a, \bar a) \ge 0}$$

Получили квадратный трехчлен относительно λ, который принимает неотрицательные значения. Такое возможно, когда его дискриминант неположителен, т.е. в случае, если

D<=0

$$(\bar a, \bar b)^2 - (\bar a, \bar a)(\bar b, \bar b) \le 0 \Rightarrow (\bar a, \bar b)^2 \le (\bar a, \bar a)(\bar b, \bar b) \Rightarrow (\bar a, \bar b)^2 \le |\bar a|^2 \left|\bar b\right|^2$$

Что и требовалось доказать.



a={a1;a2}
b={b1;b2}
(a,b)=a1*b1+a2*b2

Пример 29. Докажем, что для любых действительных чисел $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ справедливо соотношение

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

(оно называется *неравенством Коши — Буняковского*).

Решение. Пусть $m_1, \dots, m_n$ — какие-либо положительные числа. Выберем на числовой оси точки $A_1, \dots, A_n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ и поместим в них массы $m_1, \dots, m_n$. Координата центра масс м. т. $m_1A_1, \dots, m_nA_n$ равна $x = \dfrac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}$, и, согласно следствию 1, имеем (взяв момент системы относительно нулевой точки числовой оси)

$$m_1x_1^2 + \dots + m_nx_n^2 \geqslant \frac{1}{m_1 + \dots + m_n}(m_1x_1 + \dots + m_nx_n)^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n$.

Положим теперь (считая, что все числа $b_1, \dots, b_n$ отличны от нуля): $m_k = b_k^2$, $x_k = \dfrac{a_k}{b_k}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда из доказанного неравенства непосредственно следует неравенство Коши — Буняковского (для отличных от нуля $b_1, \dots, b_n$). Легко видеть, что если некоторые из чисел $b_1, \dots, b_n$ обращаются в нуль, это неравенство остается справедливым.

(a1b1+...+anbn)^2 <= (a1^2+...an^2)(b1^2+...+bn^2)

(a1 + a2 + … + an)/n > = [n]V(a1*a2*...*an)

(a1^2+...an^2)>=(a1+...+an)^2/n
(a1+...an)/n>=(Va1+...+Van)^2/n^2 = ((Va1+...+Van)/n)^2