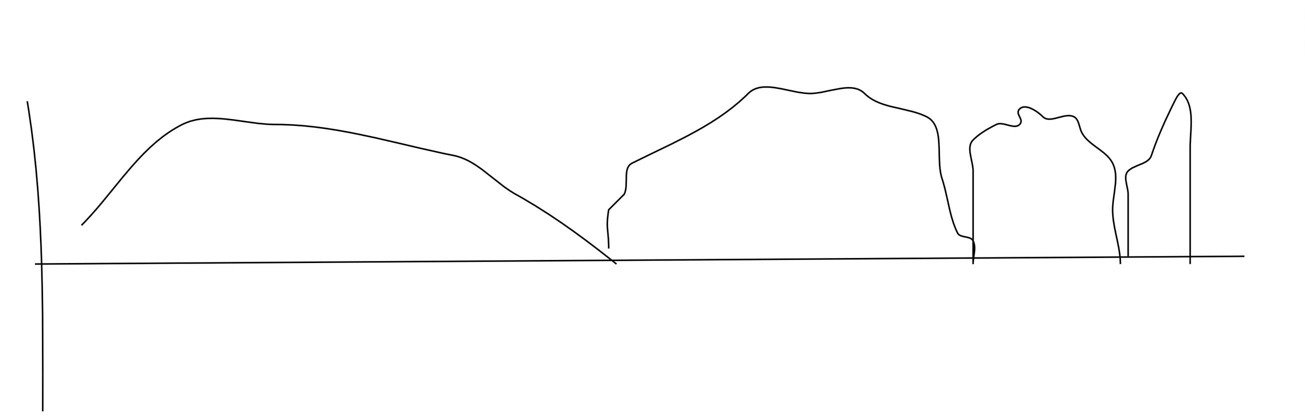
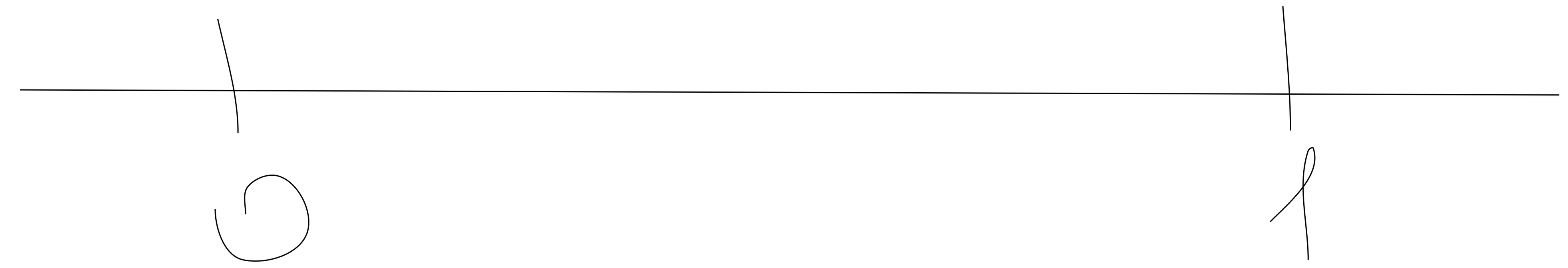


$an=(1 + 1/n)^n$ $cn=(1 + 1/n)^{(n + 1)}$

Задача 1
Докажите, что существуют sup(an) и inf(cn)

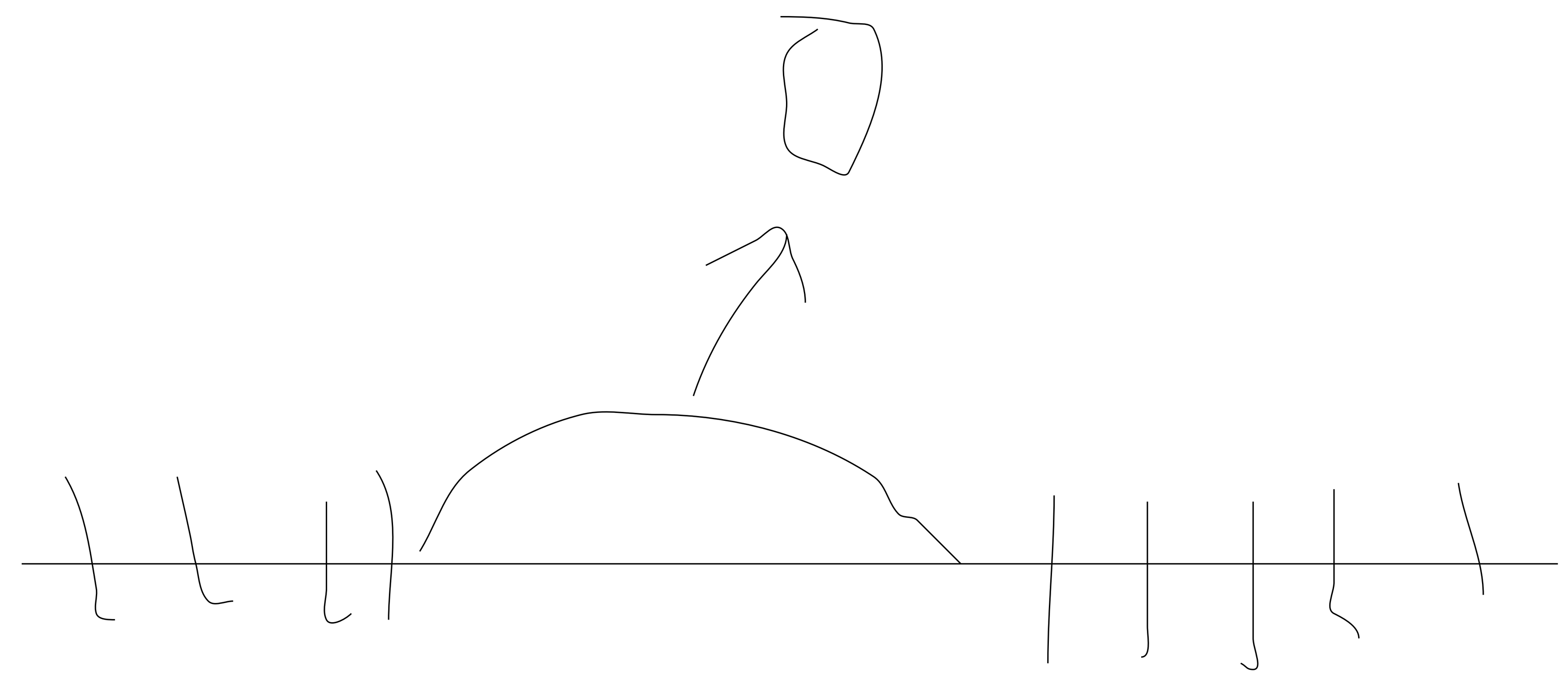
Задача 2
Докажите, что sup(an)=inf(cn)

Определение
Числом Эйлера е называется sup(an) (и inf(cn))



Задача 1
cn>0 => inf exists for cn

$an=(1 + 1/n)^n=1^n+C(n,1)*1/n+C(n,2)*1/n^2+...C(n,n)1/n^n=$
$=1^n+C(n,1)*1/n+C(n,2)*1/n^2+...C(n,n)1/n^n< 1 + 1 / 1! + 1 / 2! + 1 / 3! + 1 / 4!+...+1/n! <$
$< 1+ 1 + ½ + 1/(2*2) + 1/(2*2*2) +... + 1/ 2^{(n-1)} < 3$ => sup exists for an



$C(n,1)=n!/1!(n-1)!=n$
$C(n,2)=n!/2!(n-2)!=n(n-1)/2$
$C(n,3)=n(n-1)(n-2)/3!$
$C(n,4)=n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$

$C(n,1)*1/n=n/n=1=1/1!$
$C(n,2)*1/n^2=n(n-1)/(2n^2)=1 / 2!\ 1*(1-1/n)< 1 / 2! = 1/(1*2) = 1/2$
$C(n,3)*1/n^3=n(n-1)(n-2)/3!=1 / 3!\ 1*(1-1/n)(1-2/n) < 1 / 3! = 1 / (1*2*3) < 1/(2*2)$
$C(n,4)*1/n^4=n(n-1)(n-2)(n-3)/4!=1 / 4!\ 1*(1-1/n)(1-2/n)(1-3/n) < 1 / 4! = 1/ (1*2*3*4) < 1/(2*2*2)$

Задача 2

$c(n)-a(n) = (1 + 1/n)^{(n + 1)} - (1 + 1/n)^n = (n + 1)^{(n + 1)}/n^{(n + 1)} - (n + 1)^n/n^n=$
$=(n+1)^n/n^n[(n + 1)/n - 1]=(n+1)^n/n^n[(n + 1-n)/n]=(n+1)^n/n^n*1/n=[(n+1)/n]^n*1/n=$
$=[n/n+1/n]^n*1/n=[1+1/n]^n*1/n \to 0$ при $n\to \infty$

$1<[1+1/n]^n<3$

$e=1 + 1 / 1! + 1 / 2! + 1 / 3! + 1 / 4!+...+1/n! +....$