$an=(1 + 1/n)^n$
$cn=(1 + 1/n)^{(n + 1)}$

Задача 1
Докажите, что существуют $\sup(an)$ и $\inf(cn)$

Задача 2
Докажите, что $\sup(an)=\inf(cn)$

Определение
Числом Эйлера e называется $\sup(an)$ (и $\inf(cn)$)

$(1 + 1/n)^n$

$1 + 1/n<=1.5$

$(1+1/n)^n=2 + (n-1) / 2n + (n-1)(n-2) / 6n^2 + (n-1)(n-2)(n-3) / 24n^3+\ldots$

$2+(1-1/n) / 2! + (1 - 1/n)(1 - 2/n) / 3! + (1 - 1/n)(1 - 2/n)(1 - 3/n) / 4! +\ldots <=$
$2+1 / 2! + 1 / 3! + 1 / 4! +\ldots <= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1/16+\ldots <= 2+1=3$

$a(n)<=3$ => существует $\sup(an)$

$c(n)>=1$ => существует $\inf(cn)$

$a(n)-c(n) \to 0$

$(1+1/n)^n - (1+1/n)^{(n+1)} \to 0$
$(n+1)^n / n^n - (n+1)^{(n+1)} / (n)^{(n+1)} \to 0$
$(n(n+1)^n - (n+1)^{(n+1)} / n^{(n+1)} \to 0$
$((n+1)^n * (n-n-1)) / n^{(n+1)} \to 0$
$(n+1)^n/n^n * (-1) /n \to 0$
$[(n+1)/n]^n * (-1) /n \to 0$
$|[(n+1/n)]^n | * (-1/n) \to 0$
$const* (-1/n) \to 0$

$e = 2.71$