В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

Условие

а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены чёрные и белые фишки. Докажите, что найдутся 3 фишки одного цвета,

лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в) Для каких правильных n-угольников аналогичное верно, а для каких — нет.

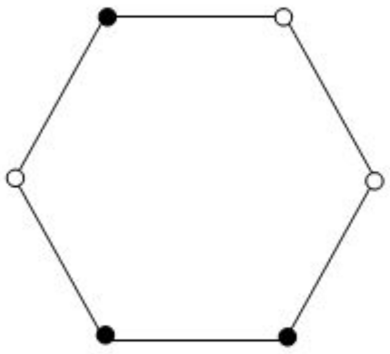
Решение

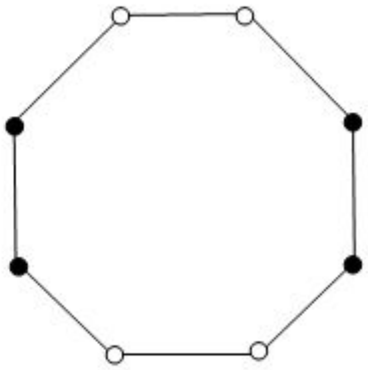
а) Среди семи вершин семиугольника $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ найдутся две соседние вершины с фишками одного цвета (если бы цвета чередовались, то многоугольник имел бы четное число сторон). Пусть, например, в вершинах A_1 и A_2 стоят белые фишки.

Существуют три вершины (A_0, A_3 и A_5), каждая из которых образует вместе с вершинами A_1 и A_2 равнобедренный треугольник. Если в одной из них стоит белая фишка, то соответствующий треугольник — искомый. Если же во всех трех этих вершинах черные фишки, то искомый треугольник — $A_3A_0A_5$.

б) См. в).

в) Очевидно, что утвержение неверно для $n = 3, 4$. Оно неверно также для $n = 6, 8$ (см. рис.). Докажем, что оно верно для всех $n \geq 9$.





Если цвета фишек чередуются, то уже среди пяти последовательных вершин встретится требуемый равнобедренный треугольник. Пусть для некоторой расстановки фишек в вершинах правильного n-угольника утверждение неверно и в каких-то двух соседних вершинах стоят фишки одного цвета. Можно считать, что вершины A_4 и A_5 — "белые". Тогда вершины A_3 и A_6 — "черные". Из равнобедренного треугольника $A_3A_6A_9$ заключаем, что A_9 — "белая". Из рассмотрения треугольников $A_1A_5A_9$ и $A_5A_7A_9$следует, что A_1 и A_7 — "белые". Но тогда $A_2A_5A_7$ — "белый" равнобедренный треугольник. Противоречие.

Ответ

б) Неверно. в) Для $n = 5$, $n = 7$ и $n \geq 9$.

Замечания

1. Рассуждение п. а) годится для любого правильного n-угольника с нечетным $n \geq 5$. В частности, для $n = 13$ (такая задача давалась на Московской математической олимпиаде — см. зад. 78806).

2. Можно показать, что при любом разбиении множества $\{1, 2, ..., 9\}$ на два подмножества хотя бы в одном из подмножеств встретятся три числа, из которых одно равно полусумме двух других. В п. в) мы доказали это при дополнительном предположении, что 4 и 5 принадлежат одному подмножеству. Другие случаи разбираются аналогично.