а) Докажите, что существует число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на 179.
б) А можно ли обойтись без нулей?

<u>Задача.</u>

Докажите, что для любого натурального числа n существует целое число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на n.

<u>Решение.</u>

Рассмотрим конечную последовательность, состоящую из $n+1$ чисел:

$$1;\ 11;\ 111;\ \dots;\underbrace{1\dots1}_{n};\ \underbrace{1\dots11}_{n+1}.$$

Десятичная запись первого числа состоит из одной единицы, второго – из двух единиц и т.д.
При делении любого натурального числа на n может получиться один из остатков, равных 0; 1; 2; …; (n-1).
Рассмотрим n ячеек и занумеруем их остатками 0; 1; 2; …; (n-1).
Тогда при распределении $(n+1)$ чисел $1;\ 11;\ 111;\ \dots;\underbrace{1\dots1}_{n};\ \underbrace{1\dots11}_{n+1}$ по этим ячейкам найдётся ячейка, в которую попадут, по крайней мере, два числа a и b ($a>b$), поскольку распределяемых чисел больше, чем ячеек. Так как числа a и b дают одинаковые остатки при делении на n, то их разность нацело будет делиться на n, т.е.

$$a-b=\underbrace{1\dots1}_{m}-\underbrace{1\dots1}_{k}=\underbrace{1\dots1}_{m-k}\underbrace{0\dots0}_{k}\ \vdots\ n$$

Таким образом, мы доказали, что существует натуральное число, кратное n, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.

<u>Утверждение доказано.</u>

<u>Примечание:</u> при решении данной задачи был использован принцип Дирихле.

1) 1,11,111,1111,11111,...., 1(180 штук)1 - 180 чисел
2) рассмотри остатки этих чисел от деления на 179

$$\begin{array}{r} 111\dots11 \\ -\ 1\dots11 \\ \hline 1100\dots000 \end{array}$$

$179n+k$

$179m+k$

$$\cancel{1100\dots000} = \frac{11\dots1\cdot 10^p}{179}$$

Условие

Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

Решение

Рассмотрим 1988 чисел - "кроликов" 1, 11, 111, ..., 111...11 (1988 единиц) и посадим их в 1987 клеток с номерами 0, 1, 2, ..., 1986 - каждое число попадает в клетку с номером, равным остатку от деления этого числа на 1987. Тогда (по принципу Дирихле) найдутся два числа, которые имеют одинаковые остатки при делении на 1987. Пусть это числа 11...11 (*m* единиц) и 11...11 (*n* единиц), причем *m* > *n*. Но их разность, которая делится на 1987, равна 11...1100...00 (*m* - *n* единиц и *n* нулей). Сократим все нули - ведь они не имеют никакого отношения к делимости на 1987 - и получим число из одних единиц, которое делится на 1987.