

Имеется 10 целых чисел. Докажите, что можно из них выбрать несколько (т.е. ровно одно или больше), чтобы их сумма делилась на 10.



Доказать, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько, сумма которых делится на 10.

Пусть эти числа  $a_1, \dots, a_{10}$ .

Рассмотрим 10 чисел:  $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+\dots+a_{10}$  и их остатки от деления на 10.

Если среди этих остатков есть хотя бы один 0, то у нас есть искомые числа, сумма которых делится на 10.

Если среди остатков нет 0, то мы имеем 10 остатков, каждый из которых может равен некоторому числу из интервала  $[1,9]$ .

По принципу Дирихле, как минимум два остатка будут равны. Рассмотрим разность между числами, остатки от деления на 10 которых равны. Очевидно, что эта разность делится на 10.

С другой стороны, эта разность представляет из себя сумму нескольких чисел из 10 исходных.

Например, если равны остатки от деления на 10 у чисел  $a_1+a_2$  и  $a_1+a_2+a_3+a_4$ , то сумма  $a_3+a_4$  делится на 10.