Натуральные числа a, b и c взаимно просты (попарно). Найдите все возможные значения a, b и c, если число (a + b)(b + c)(c + a)/abc - целое

(a+b) вз просто с a
(a+b) вз просто с b

т.е. (a+b) не делится ни на a, ни на b, откуда (a+b) делится на c

(a+b)(b+c)(c+a)/abc

Условие

Автор: Храмцов Д.

Пусть a, b и c – попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

Решение

8, 9, 10. Пусть $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = n$ – целое число, тогда

(1) (a+b)(b+c)(c+a)=n·abc

Если среди чисел a, b и c есть равные, то можно считать, ввиду симметричности выражения 1, что $a = b$. Тогда $(a,;b) = a = 1$ и выражение 1 принимает вид $(1 + c)(1 + c)2 = nc$. Откуда следует, что $2 ⋮ c$ и, значит, $c = 1$ или $c = 2$. В первом случае $n = 8$, а во втором $n = 9$. Если числа a, b и c попарно различны, то можно считать, что $a < b < c$. Если два числа взаимно просты, то сумма этих чисел взаимно проста с каждым из них, поэтому из 1 следует, что

(2) a+b=mc

и

(3) (a+c)=kb,

m и k – натуральные числа.

$\left.\begin{matrix} a<c \\ b<c \end{matrix}\right| + \quad (a+b)<2c$

Так как $a + b < 2c$, то $mc < 2c$ и, значит, $m < 2$, т.е. $m = 1$ и, следовательно,

(4) a+b=c

Выразив из 3 c и подставив в 4, получим $a + b = kb - a$ или $2a = b(k - 1)$.

Так как a и b взаимно просты, то $2 ⋮ b$. Учитывая, что $1 \leq a < b$ получаем, что $b > 1$ и, значит, $b = 2$. Тогда $a = 1$ и $c = 3$. Легко убедиться, что эти значения удовлетворяют условиям задачи и дают значение $n = 10$.

Ответ

8, 9, 10.

(1+c)(1+c)2 делится на c по условию, но (1+c) не делится на c, значит только 2 делится на c

$$\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$$

(a+c)=kb
c=kb-a

a+b=c

a+b=kb-a
2a=b(k-1)