

Исполнитель Осень16 преобразует число на экране.

У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1) **Прибавить 1;**

2) **Прибавить 2;**

3) **Прибавить 3.**

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает его на 2, третья — увеличивает на 3.

Программа для исполнителя Осень16 — это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 15 и при этом траектория вычислений содержит число 8?

Траектория вычислений программы — это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 121 при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 10, 11.

Решение.

Искомое количество программ равно произведению количества программ, получающих из числа 1 число 8, на количество программ, получающих из числа 8 число 15.

Пусть $R(n)$ — количество программ, которые число 3 преобразуют в число n , а $P(n)$ — количество программ, которые число 8 преобразуют в число n .

Для всех $n > 3$ верны следующие соотношения:

1. $R(n) = R(n - 1) + R(n - 2) + R(n - 3)$, так как существует три способа получения n — прибавлением единицы, прибавлением двойки или прибавлением тройки. Аналогично $P(n) = P(n - 1) + P(n - 2) + P(n - 3)$

Последовательно вычислим значения $R(n)$:

$$R(1) = 1$$

$$R(2) = 1$$

$$R(3) = 2$$

$$R(4) = R(1) + R(2) + R(3) = 4$$

$$R(5) = R(4) + R(3) + R(2) = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$R(6) = R(5) + R(4) + R(3) = 7 + 4 + 2 = 13$$

$$R(7) = R(6) + R(5) + R(4) = 13 + 7 + 4 = 24$$

$$R(8) = R(7) + R(6) + R(5) = 24 + 13 + 7 = 44$$

Теперь вычислим значения $P(n)$:

$$P(8) = 1$$

$$P(9) = 1$$

$$P(10) = 2$$

$$P(11) = 4$$

$$P(12) = P(11) + P(10) + P(9) = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$P(13) = P(12) + P(11) + P(10) = 7 + 4 + 2 = 13$$

$$P(14) = P(13) + P(12) + P(11) = 13 + 7 + 4 = 24$$

$$P(15) = P(14) + P(13) + P(12) = 24 + 13 + 7 = 44$$

Таким образом, количество программ, удовлетворяющих условию задачи, равно $44 \cdot 44 = 1936$.

Ответ: 1936.

Приведём другое решение на языке Python.

```
def f(x, y):
    if x > y:
        return 0
    if x == y:
        return 1
    else:
        return f(x + 1, y) + f(x + 2, y) + f(x + 3, y)
print(f(1, 8) * f(8, 15))
```