

Исполнитель преобразует число на экране.

У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя — это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 20 и при этом траектория вычислений содержит число 10?

Траектория вычислений программы — это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 121 при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 17.

Решение.

Искомое количество программ равно произведению количества программ, получающих из числа 1 число 10, на количество программ, получающих из числа 10 число 20.

Пусть $R(n)$ — количество программ, которые число 1 преобразуют в число n , $F(n)$ — количество программ, которые число 10 преобразуют в число n .

Верны следующие соотношения:

$$R(n) = R(n-1) + R(n/2) \text{ (если } n \text{ — чётно)}.$$

$$R(1) = 1.$$

$$R(2) = R(1) + R(1) = 2.$$

$$R(3) = R(2) = 2.$$

$$R(4) = R(3) + R(2) = 2 + 2 = 4.$$

$$R(5) = R(4) = 4.$$

$$R(6) = R(5) + R(3) = 4 + 2 = 6.$$

$$R(7) = R(6) = 6.$$

$$R(8) = R(7) + R(4) = 6 + 4 = 10.$$

$$R(9) = R(8) = 10.$$

$$R(10) = R(9) + R(5) = 10 + 4 = 14.$$

$$F(10) = 1.$$

$$F(11) = F(10) = 1.$$

$$F(12) = F(11) = 1.$$

$$F(13) = F(12) = 1.$$

$$F(14) = F(13) = 1.$$

$$F(15) = F(14) = 1.$$

$$F(15) = F(14) = 1.$$

$$F(16) = F(15) = 1.$$

$$F(17) = F(16) = 1.$$

$$F(18) = F(17) = 1.$$

$$F(19) = F(18) = 1.$$

$$F(20) = F(19) + F(10) = 2.$$

Таким образом, количество программ, удовлетворяющих условию задачи равно $14 \cdot 2 = 28$.

Ответ: 28.

Приведём другое решение на языке Python.

```
def f(x, y):
    if x > y:
        return 0
    if x == y:
        return 1
    else:
        return f(x + 1, y) + f(x * 2, y)
print(f(1, 10) * f(10, 20))
```