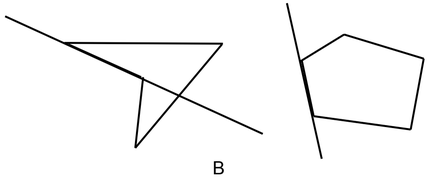
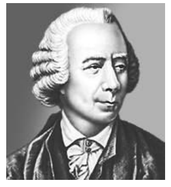
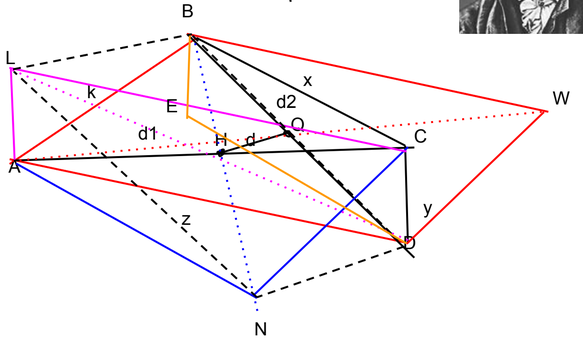
Дан произвольный выпуклый 4-х угольник. Сумма квадратов длин его сторон равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учётверённым квадратом расстояния между серединами диагоналей. (Эйлер) $x^2 + y^2 + z^2 + k^2 = d1^1 + d2^2 + 4d^2$

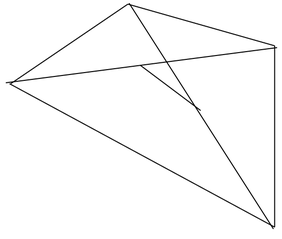


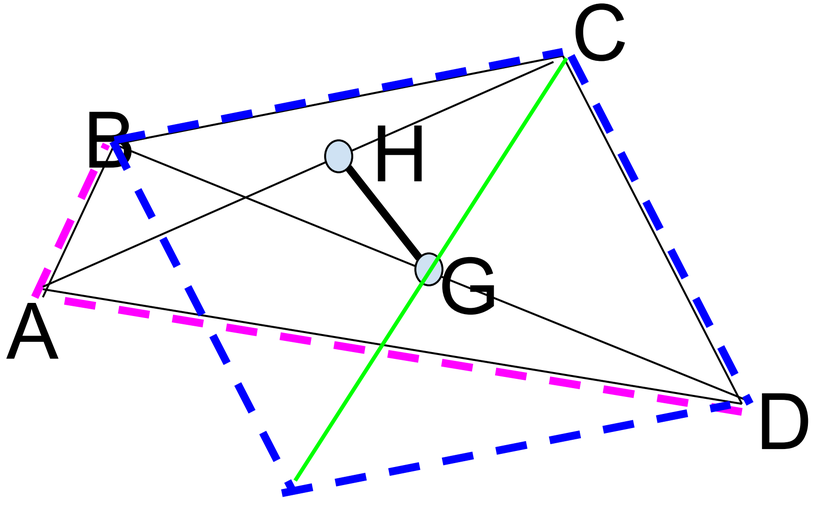
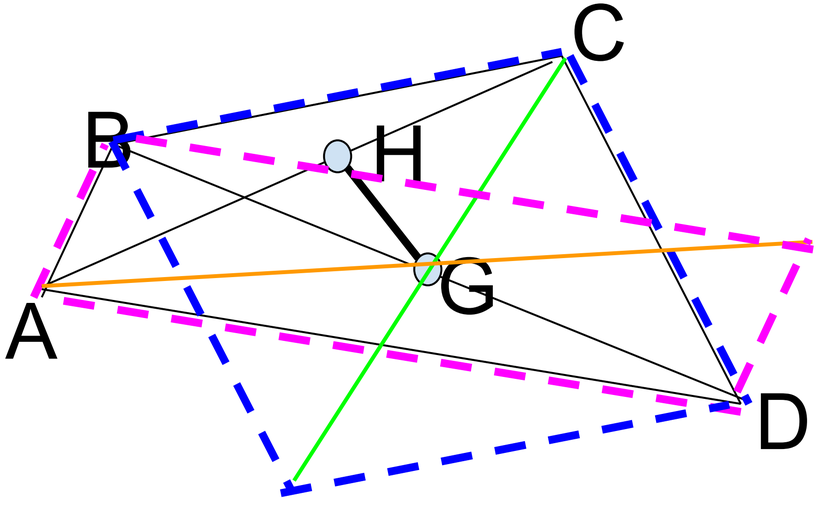
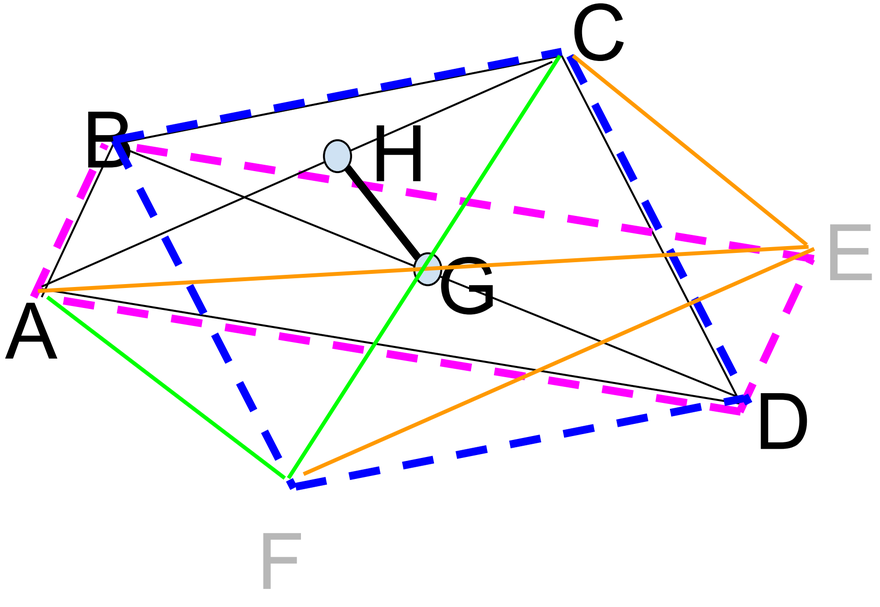




$d2^2+CE^2=2(x^2+y^2)$
$d2^2+AW^2=2(k^2+z^2)$
ABCN (1)
$d1^2+BN^2=2(k^2+x^2)$
LACD (2)
$d1^2+LD^2=2(z^2+y^2)$
LBDN (3)
$LD^2+BN^2=2(d2^2+(2d)^2)$
в ABCN H - середиен а AC и поэтому середина BN
в ADCL H - середиен а AC и поэтому середина DL
если H середина BN и DL, то BDNL - паралелограм
ND = 2d как средняя линия
ND=BL
(1)+(2)-(3)

$d1^2+BN^2+d1^2+LD^2-LD^2-BN^2=$
$2(k^2+x^2)+2(z^2+y^2)-2(d2^2+(2d)^2)$
$2d1^2=2k^2+2x^2+2z^2+2y^2-2d2^2-8d^2$
$d1^2+d^2+4d^2=k^2+x^2+z^2+y^2$



В синем $2(CD^2+BC^2)=CF^2+BD^2$
В розовом $2(AB^2+AD^2)=AE^2+BD^2$
Рыжий $2(AC^2+AF^2)=AE^2+FC^2$
G-серед AE и H серед AC | GH ср лин тр ACE | CE= 2HG

В синем $2(CD^2+BC^2)=CF^2+BD^2$
В розовом $2(AB^2+AD^2)=AE^2+BD^2$
Рыжий $2(AC^2+(2HG)^2)=AE^2+FC^2$
Синее+Розовое-Рыжее
$2(CD^2+BC^2)+2(AB^2+AD^2)-2(AC^2+(2HG)^2)=CF^2+BD^2+AE^2+BD^2-AE^2-FC^2$
$2CD^2+2BC^2+2AB^2+2AD^2-2AC^2-2(2HG)^2=2BD^2$
$CD^2+BC^2+AB^2+AD^2-AC^2-(2HG)^2=BD^2$
$CD^2+BC^2+AB^2+AD^2=AC^2+4HG^2+BD^2$