

# Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1) Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$$

2)(\*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

3)(\*\*) Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = \dots$$

Примечание 1:

Для 16-и квадратов неверно.

Примечание 2:

Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 3:

Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса

$$D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Группировка

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ay - bx)^2 + (ax + by)^2$$

**a=2**  
**b=3**  
**x=4**  
**y=5**  
 $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$   
 $x^2 + y^2 = 16 + 25 = 41$   
 $13 * 41 = 533$

**ay - bx = -2**  
**ax + by = 23**  
 $2^2 + 23^2 = 4 + 529 = 533$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = p^2 + u^2 + i^2$$

Теорема Фробениуса

3 d

Комплексные числа

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (a^2 - 2ab + 2ab + b^2)(x^2 - 2xy + 2xy + y^2) = ((a-b)^2 + 2ab)((x-y)^2 + 2xy) = (?_1)^2 + 2ab * (?_2)^2 + 2xy$$

Указание

1) раскрыть скобки  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = (ax)^2 + (ay)^2 + (bx)^2 + (by)^2 = (ax)^2 + 2axby + (by)^2 + (ay)^2 - 2aybx + (bx)^2 = (ay - bx)^2 + (ax + by)^2$

2) после этого попытаться придумать некоторые виртуальные слагаемые, чтобы все свести к сумме 2-х квадратов

3) **виртуальные слагаемые придумывать на основе подсказки:**  
квадраты конструировать с помощью формул  
 $a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$   
 $a^2 - 2 * a * b + b^2 = (a - b)^2$