

Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1) Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ из 3-х слагаемых делать 1 квадрат}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

2)(*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

3)(**) Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = \dots$$

Примечание 1:

Для 16-и квадратов неверно.

Примечание 2:

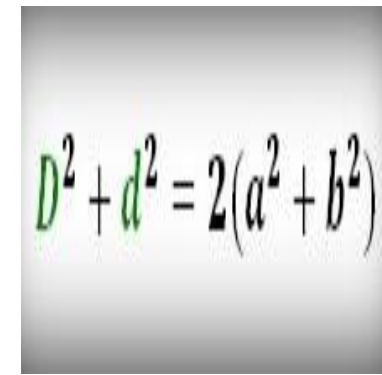
Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 3:

Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса

$$C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{56}{2} = 28$$

$$28 \cdot 8 =$$



До этого момента мы использовали метод группировки для разложения на множители буквенных выражений

Здесь показано будет, что метод группировки можно использовать и для других вещей

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \\ &= (ax)^2 + (ay)^2 + (bx)^2 + (by)^2 + 2(ax)(by) - 2(ay)(bx) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \end{aligned}$$

$$a=2 \quad b=4 \quad x=5 \quad y=7$$

$$(2^2 + 4^2) \cdot (5^2 + 7^2) = 1480$$

$$(38)^2 + (6)^2$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) &= \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + a^2p^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + b^2p^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 + c^2p^2 + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 + d^2p^2 = \\ &= ()^2 + ()^2 + ()^2 + ()^2 \end{aligned}$$

16 есть

по 2

свернется 8 квадратов

надо придумать 24 слагаемых (из 12 должны быть с +, а 12 с -)