Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$

1)Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$

например, вот так:

$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax)^2+(ay)^2+(bx)^2+(by)^2=$
$=[(ax)^2+(by)^2]+[(ay)^2+(bx)^2]=$
$=[(ax)^2+2axby+(by)^2]+[(ay)^2-2axby+(bx)^2]=$
$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

2)(*)Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$

a=8
b=7
x=3
y=1

$ax+by=24+7=31$
$ay-bx=8-21=-13$

$(8^2 + 7^2)(3^2 + 1^2) =(31)^2+(13)^2$

3)(**)Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = ...$

Примечание 1:
Для 16-и квадратов неверно.
Примечание 2:
Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.
Примечание 3:
Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса