

Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1) Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2 * a * b + b^2 = (a - b)^2$$

2)(*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

3)(**) Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = \dots$$

Примечание 1:

Для 16-и квадратов неверно.

Примечание 2:

Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 3:

Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса

Метод группировки применим к очень разным задачам (а не только к разложению на множителю)

комплексные числа	
$\sqrt{25}=5$	$(5^2=25)$
$\sqrt{-25}=i$	$(i^2=-25)$
$\sqrt{-1}=x$	$x^2=-1$
$\sqrt{-1}=i$	$i^2=-1$

$$D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= \\ &= (a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)y^2 = \\ &= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 = \\ &= (ax)^2 + (bx)^2 + (ay)^2 + (by)^2 = \\ &= (ax)^2 + (by)^2 + (bx)^2 + (ay)^2 = \\ &= (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 - 2axby + 2axby = \\ &= (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2$$

$$a = 10$$

$$b = 5$$

$$x = 7$$

$$y = 18$$

$$ax + by = 10 * 7 + 5 * 18 = 70 + 90 = 160$$

$$bx - ay = 5 * 7 - 10 * 18 = 35 - 180 = -145$$

$$a^2 + b^2 = 125$$

$$x^2 + y^2 = 49 + 324 = 373$$

$$125 * 373 = 46625$$

$$(10^2 + 5^2)(7^2 + 18^2) = 46625 = 160^2 + 145^2$$

$$a^2x^2 = (ax)^2$$

$$a^2x^2 = a * a * x * x =$$

$$= a * x * a * x = (a * x) * (a * x) =$$

$$= (a * x)^2$$

лирическое отступление

$$a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$$

тригонометрия - sin, cos, tg, ctg