

Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

$$D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

2)(\*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \quad (0-)(6+)$$

$$a-b = a+(-b)$$

$$\begin{aligned} (a - b + c + d)^2 &= (a + (-b) + c + d)^2 = \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + d^2 + 2a(-b) + 2ac + 2ad + 2(-b)c + 2(-b)d + 2cd = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac + 2ad - 2bc - 2bd + 2cd \quad (3-)(3+) \end{aligned}$$

$$(ax+by+cz+dt)^2 + (ay-bx+ct-dz)^2 + (az-bt-cx+dy)^2 + (at+bz-cy-dx)^2$$

$$\begin{aligned} (a - b - c + d)^2 &= (a + (-b) + (-c) + d)^2 = \\ &= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + d^2 + 2a(-b) + 2a(-c) + 2ad + 2(-b)(-c) + 2(-b)d + 2(-c)d = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd - 2cd \quad (4-)(2+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b - c - d)^2 &= (a + (-b) + (-c) + (-d))^2 = \\ &= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2 + 2a(-b) + 2a(-c) + 2a(-d) + 2(-b)(-c) + 2(-b)(-d) + 2(-c)(-d) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac - 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \quad (3-)(3+) \end{aligned}$$

$$(a - b - c - d)^2 = (-(-a+b+c+d))^2 = (-a+b+c+d)^2$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)y^2 + \\ &+ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)z^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)p^2 = a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + d^2x^2 + \\ &a^2y^2 + b^2y^2 + c^2y^2 + d^2y^2 + a^2z^2 + b^2z^2 + c^2z^2 + d^2z^2 + a^2p^2 + b^2p^2 + c^2p^2 + d^2p^2 = \\ &= (ax)^2 + (bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2 + (ay)^2 + (by)^2 + (cy)^2 + (dy)^2 + (az)^2 + (bz)^2 + (cz)^2 + (dz)^2 + (ap)^2 + (bp)^2 + (cp)^2 + (dp)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 + (dp)^2 + 2(ax)(by) + 2(ax)(cz) + 2(ax)(dp) + 2(by)(cz) + 2(by)(dp) + 2(cz)(dp) \quad (0-)(6+) \quad (ax+by+cz+dp)^2 \\ &+ (bx)^2 + (ay)^2 + (dz)^2 + (cp)^2 - 2(bx)(ay) - 2(bx)(dz) + 2(bx)(cp) + 2(ay)(dz) - 2(ay)(cp) - 2(dz)(cp) \quad (4-)(2+) \quad (-bx+ay+dz-cp)^2 \\ &+ (cx)^2 + (dy)^2 + (az)^2 + (bp)^2 + 2(cx)(dy) - 2(cx)(az) - 2(cx)(bp) - 2(dy)(az) - 2(dy)(bp) + 2(az)(bp) \quad (4-)(2+) \quad (-cx-dy+az+bp)^2 \\ &+ (dx)^2 + (cy)^2 + (bz)^2 + (ap)^2 - 2(dx)(cy) + 2(dx)(bz) - 2(dx)(ap) - 2(cy)(bz) + 2(cy)(ap) - 2(bz)(ap) \quad (4-)(2+) \quad (-dx+cy-bz+ap)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) &= \\ &= (ax + by + cz + dt)^2 + (ay - bx + ct - dz)^2 + (az - bt - cx + dy)^2 + (at + bz - cy - dx)^2. \end{aligned}$$

замена ролей

c-d

z-t

$$(ax+by+dt+cz)^2 + (ay-bx+dz-ct)^2 + (at-bz-dx+cy)^2 + (az+bt-dy-cx)^2$$