

## Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1) Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$$

2)(\*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

3)(\*\*) Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = \dots$$

Примечание 1:

Для 16-и квадратов неверно.

Примечание 2:

Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 3:

Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса

$$D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= \\ &= (a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)y^2 = \\ &= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 = \\ &= (ax)^2 + (bx)^2 + (ay)^2 + (by)^2 = \\ &= (ax)^2 + (by)^2 + (bx)^2 + (ay)^2 = \\ &= (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 - 2(ax)(by) + (bx)^2 + (ay)^2 = \\ &= (ax+by)^2 - 2(ax)(by) + (bx)^2 + (ay)^2 = \\ &= (ax+by)^2 + (bx)^2 - 2(ax)(by) + (ay)^2 = \\ &= (ax+by)^2 + (bx-ay)^2 \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax+by)^2 + (bx-ay)^2$$

$$a=17$$

$$b=3$$

$$x=8$$

$$y=11$$

$$ax+bx=17*8+3*11=136+33=169$$

$$bx-ay=3*8-17*11=24-187=163$$

$$163^2 + 169^2 = 55130$$

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 55130$$

$$m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2 \text{ квадрат разности}$$

$$m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2 \text{ квадрат суммы}$$

$$m^2 + mn + mn + n^2 = m(m+n) + n(n+m) =$$

$$= (m+n)(m+n) = (m+n)^2$$

$$m^2 * n^2 = (mn)^2$$