(*)(*)(*) Великая теорема Ферма

а) x^3 + y^3 = z^3 , не имеет решений в целых числах
б) x^4 + y^4 = z^4 , не имеет решений в целых числах
в) x^n + y^n = z^n , где n>2 не имеет решений в целых числах

Доказательство великой теоремы Ферма для показателя степени n=4
Великая теорема Ферма формулируется следующим образом: диофантово уравнение:

$A^n + B^n = C^n$ (1)

где n - целое положительное число, большее двух, не имеет решения в целых положительных числах.

Суть Великой теоремы Ферма не изменится, если уравнение (1) запишем следующим образом:

$A^n = C^n - B^n$ (2)

Пусть показатель степени n=4. Тогда уравнение (2) запишется следующим образом:

$A^4 = C^4 - B^4$ (3)

Уравнение (3) запишем в следующем виде:

$A^4 = (C^2)^2 - (B^2)^2 = (C^2 - B^2) \cdot (C^2 + B^2)$ (4)

Пусть: $(C^2 - B^2) = N^4$ (5)

Уравнение (5) рассматриваем как параметрическое уравнение 4 - ой степени с параметром N и переменными B и C. Преобразуем уравнение (5):

$N^4 = (C - B) \cdot (C + B)$ (6)

Для доказательства используем метод замены переменных. Обозначим:

$C-B=M$ (7)

Из уравнения (7) имеем:

$C=B+M$ (8)

Из уравнений (6), (7) и (8) имеем:

$N^4 = M \cdot (B+M+B) = M \cdot (2B+M) = 2B \cdot M + M^2$ (9)

Из уравнения (9) имеем:

$N^4 - M^2 = 2B \cdot M$ (10)

Отсюда:

$$B = \frac{N^4 - M^2}{2M} = \frac{1}{2}\left[\frac{N^4}{M} - M\right] = \frac{N^4}{2M} - \frac{M}{2} \quad (11)$$

Из уравнений (8) и (11) имеем:

$$C = \frac{N^4}{2M} - \frac{M}{2} + M = \frac{N^4}{2M} + \frac{M}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{N^4}{M} + M\right] = \frac{N^4 + M^2}{2M} \quad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) следует, что необходимым условием для того чтобы числа B и C были целыми, является делимость числа N^4 на число M, т.е. число M должно быть одним из сомножителей, входящих в состав сомножителей числа N^4.

Из уравнений (11) и (12) также следует, что необходимым условием для того чтобы числа B и C были целыми, является также одинаковая четность чисел N и M: оба числа должны быть четными или оба нечетными.

Из уравнений (11) и (12) также следует:

$$C^2 + B^2 = \left[\frac{N^4 + M^2}{2M}\right]^2 + \left[\frac{N^4 - M^2}{2M}\right]^2 = \frac{N^8 + M^4}{2M^2} \quad (13)$$

Обозначим:

$C^2 + B^2 = K$ (14)

Пусть:

$N = P \cdot S$; $M = S^2$

Тогда:

$$K = C^2 + B^2 = \frac{N^8 + M^4}{2M^2} = \frac{P^8 S^8 + S^8}{2S^4} = S^4\left[\frac{P^8 + 1}{2}\right] \quad (15)$$

Из уравнений (4), (5) и (15) следует:

$$A^4 = N^4 \cdot K = N^4 \cdot S^4 \cdot \left[\frac{P^8 + 1}{2}\right] \quad (16)$$

Отсюда следует:

$$A = N \cdot S \cdot \sqrt[4]{\frac{P^8 + 1}{2}} \quad (17)$$

Очевидно, что:

$\sqrt[4]{\frac{P^8 + 1}{2}}$ - дробное число.

То есть:

$C^2 + B^2 \neq R^4$; $A^4 \neq N^4 \cdot R^4$

Следовательно, в соответствии с формулой (17) число A - дробное число.

Другими словами, определенные по формулам (11) и (12) значения чисел B и C удовлетворяют только уравнению (5) и не удовлетворяют предполагаемому равенству:

$C^2 + B^2 = R^4$

Таким образом, великая теорема Ферма не имеет решения в целых положительных числах для показателя степени n=4.