

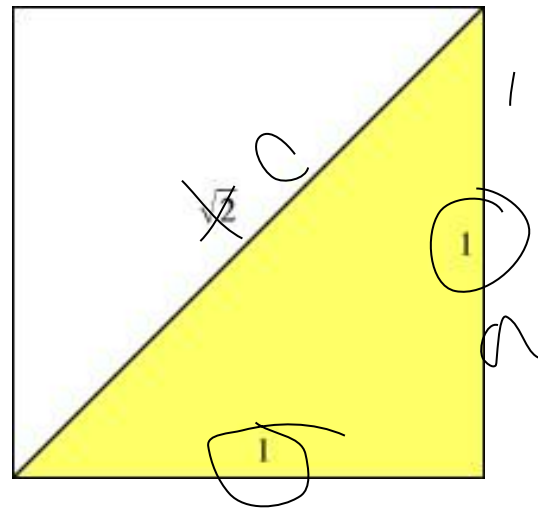
Рождение иррациональных чисел

Рассмотрите квадрат со стороной один. Найдите длину его диагонали.

Докажите, что длина диагонали квадрата - число иррациональное (не представимо в виде p/q , где p - целое, q - натуральное)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 1^2 + 1^2 &= c^2 \\ 2 &= c^2 \\ c &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$c = \sqrt{2}$$



$$\begin{aligned} a &= k \cdot t \\ c &= p \cdot t \end{aligned}$$

$$t = \frac{a}{k}$$

$$t = \frac{c}{p}$$

$$\frac{a}{k} = \frac{c}{p}$$

$$c = \frac{a \cdot p}{k}$$

док-во
от противного, пусть это не так, пусть $\sqrt{2}$ - число рациональное
 $\sqrt{2} = p/q$, причем можно считать что p/q - несократимая дробь, p и q - натуральные

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= p/q \quad |^2 \\ 2 &= p^2/q^2 \quad | \cdot q^2 \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

из этого равенства мы заключим, что p должно быть четным числом

$$p = 2k$$

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (2k)^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 \quad | :2 \\ q^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

из этого равенства мы заключим, что q должно быть четным числом

получается, что p обязательно четное и q обязательно четное, а значит дробь p/q сократима на 2

$$\begin{aligned} 2q^2 &= p^2 \\ \text{хотим доказать, что } p & \text{ - четное} \end{aligned}$$

пусть это не так
тогда p - нечетное, тогда $p = 2k + 1$

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (2k+1)^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ \text{чет} &= \text{чет} + 1 \\ \text{противоречие} \end{aligned}$$

нат $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots, 10, 11, \dots$
цел $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
ррац $\mathbb{Q} = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

иррац \mathbb{I}

все числа, не являющиеся рациональными

$$1.5 = 3/2 \quad 2.25 = 9/4 \quad 0.3333\dots = 1/3$$

0,121121112111121111121111121111121111112...