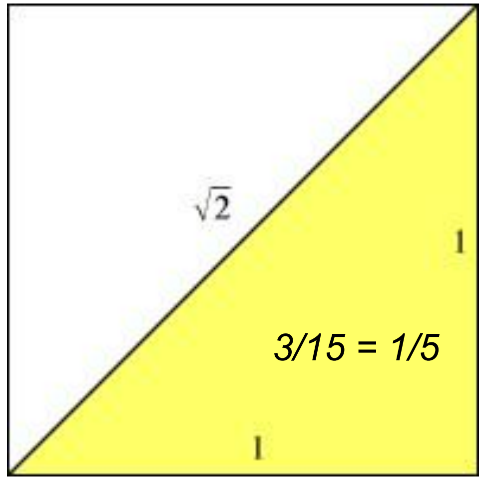
## *Рождение иррациональных чисел*

*Рассмотрите квадрат со стороной один. Найдите длину его диагонали.*
*Докажите, что длина диагонали квадрата - число иррациональное (не представимо в виде p/q , где p - целое, q - натуральное)*




натуральные N
1,2,3,,..10,11,12,... (количество предметов)

целые Z
0,+-1,+-2,+-3,,..+-10,+-11,+-12,...

рациональные (обыкновенные дроби) Q
числа вида +- m/n, m - целое, n - натуральное

иррациональные I (не являющиеся рациональными, т.е. нельзя представить в виде дроби)
V2 - первое найденное

log_2(1024)=10
log_2(1000)=9.923....(иррац)
число PI = 3.14... (иррац)
число e=2.71... (иррац)

в XIX Георг Кантор (теория бесконечных множеств)
иррац > рац

пусть V2 - рациональное (доказательство от противного) тогда его можно представить в виде несократимой дроби m/n
V2=m/n | ^2
2 = m^2/n^2 | *n^2
2n^2 = m^2
из этого верно, что m - четное число => m=2*k
2n^2 = (2*k)^2
2n^2 =4*k^2 | :2
n^2=2k^2
из этого верно, что n - четное число => n=2*p

мы пришли к противоречию с несократимостью дроби m/n

2n^2 = m^2
почему m - четное

от противного
пусть m - нечетное, тогда
m=2t+1
2n^2 = (2t+1)^2
2n^2 =(2t)^2 + 2*2t*1 + 1^2
2n^2 =4t^2 + 4t + 1
чет=чет+чет+неч=неч
противоречие

(a+b)^2=a^2+2ab+b^2

дискотека идет и объявляет медленный танец

кто останется без пары - того больше

натуральные числа (девочки)

числа между 0 и 1 (мальчики)
1 - 0.12349623482568921....
2 - 0.23510352135023521 35...
3 - 0.21340023512035203512...
4 - 0.12492351346543154354...
5 - 0.4532523453245354...
пусть нам удалось так расположить числа между 0 и 1, что их все удалось пронумеровать

тогда рассмотрим число, которое от 1-ого числа отличается в 1-ой позиции
0.99919.....

количество иррациональных - мощность котинуума

если на красной диагонали встречается не 9, ставим 9-ку.

А если встречается 9-ка, ставим 1-цу

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

### Свойства функций

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ | $\sin(2\pi n+\alpha)=\sin\alpha$ , $T_0=2\pi$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\cos(2\pi n+\alpha)=\cos\alpha$ , $T_0=2\pi$
$tg(-\alpha)=-tg\alpha$ | $tg(\pi n+\alpha)=tg\alpha$ , $T_0=\pi$
$ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$ | $ctg(\pi n+\alpha)=ctg\alpha$ , $T_0=\pi$

### Основные тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$
$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{ctg\alpha}$ $\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}$
$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$ $\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$
$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=cosec^2\alpha$ $\quad cosec\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

### Сумма углов

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\, tg\beta}$
$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$

### ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

| X | $\pi+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $2\pi+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ | $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sinx | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| cosx | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| tgx | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ |
| ctgx | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ |
| f (x) | сохраняется | | | | меняется | | | |

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$ $\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$
$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $\quad \cos\alpha=\frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$

### $f(\alpha)\longrightarrow$ через $tg\frac{\alpha}{2}$ или $tg\alpha$

$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\quad \cos2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$
$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$ $\quad tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\quad ctg2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$

### $2\alpha\longrightarrow\alpha$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$tg2\alpha=\frac{2}{ctg\alpha-tg\alpha}$
$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha-tg\alpha}{2}$

### Сумма функций

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$
$tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$
$ctg\alpha-tg\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$
$\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}\pm\alpha)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}\mp\alpha)$
$A\sin\alpha+B\cos\alpha=R\sin(\alpha+\varphi)$,
где $R=\sqrt{A^2+B^2}$ , $\cos\varphi=\frac{A}{R}$, $\sin\varphi=\frac{B}{R}$

### $\frac{\alpha}{2}\longrightarrow\alpha$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

### $3\alpha\longrightarrow\alpha$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$
$ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$

### Произведение функций

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
$tg\alpha\, tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$
$ctg\alpha\, ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$
$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$1-\sin\alpha=2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$
$1+\sin\alpha=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$

### Степень

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$ $\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$
$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$ $\quad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$
$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos4\alpha-4\cos2\alpha+3)$ $\quad \cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3)$

### Общий вид уравнений

$\sin x=a \quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=a \quad x=\pm\arccos a+2\pi n$ , $n\in Z$
$tg x=a \quad x=arctg\, a+\pi n$ , $n\in Z$
$ctg x=a \quad x=arcctg\, a+\pi n$ , $n\in Z$

### Особый случай

Осевые углы

$\sin x=1 \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ , $n\in Z$
$\sin x=-1 \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ , $n\in Z$
$\sin x=0 \quad x=\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=1 \quad x=2\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=-1 \quad x=\pi+2\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ , $n\in Z$
$tg x=0 \quad x=\pi n$ , $n\in Z$
$ctg x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ , $n\in Z$

| a | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arcsin a | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | |
| arccos a | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 | | |
| arctg a | 0 | | | | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| arcctg a | $\frac{\pi}{2}$ | | | | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

помни:
знаменатель $\neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin x\approx tg x\approx x$, если $x_{рад}\longrightarrow 0$

### Свойства

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$ $\quad \arccos(-a)=\pi-\arccos a$
$arctg(-a)=-arctg\, a$ $\quad arcctg(-a)=\pi-arcctg\, a$

$\sin x=\frac{1}{2}$ , $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$ , $n\in Z$
$tg x=\sqrt{3}$ , $x=arctg\sqrt{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}+\pi n$ , $n\in Z$
$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $x=(-1)^n\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\pi n=(-1)^n(-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})+\pi n=(-1)^n(-\frac{\pi}{3})+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$ , $n\in Z$
$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x=\pm\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})+2\pi n=\pm(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2})+2\pi n=\pm(\pi-\frac{\pi}{4})+2\pi n=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n$ , $n\in Z$

### Производные

$\sin' x=\cos x$ $\quad \cos' x=-\sin x$
$tg' x=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad ctg' x=-\frac{1}{\sin^2 x}$

### Первообразные

$f(x)=\sin x \quad F(x)=-\cos x+c$
$f(x)=\cos x \quad F(x)=\sin x+c$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad F(x)=tg x+c$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x} \quad F(x)=-ctg x+c$
$f(x)=tg x \quad F(x)=-\ln|\cos x|+c$
$f(x)=ctg x \quad F(x)=\ln|\sin x|+c$

$\boxed{(-1)^n(-1)=(-1)^{n+1}}$

десятичные дроби
рациональные - периодические дроби 0.12356565656...
ирациональные - непередические