

Рациональные корни многочлена

Формулировка

В многочлене вида $A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$, $A_n \neq 0$

Рациональные корни следует искать только среди чисел вида или $-B_0/B_n$, где B_0 - делитель A_0 и B_n - делитель A_n

Доказательство

Лемма 1

Если приведенное уравнение $x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 = 0$ имеет целый корень, то он обязательно будет делителем свободного члена k_0

Лемма 2

Приведенное уравнение $x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 = 0$ не может иметь ни одного дробного корня.

Задача 1

Найти рациональные корни многочленов

1) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$

$2 \cdot \frac{1}{8} - 7 \cdot \frac{1}{4} + 2,5 - 1 = 0$

$0,25 - 1,75 + 1,5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

2) $x^3 - 3x - 2 = 0$

$x = 2$

Задача 2

Решить уравнения УГОЛКОМ

1) $1 \cdot x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$

2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

3) $x^4 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

Корней нет



$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 \mid x - \frac{1}{2} \\ 2x^3 - x^2 \qquad \qquad \qquad \mid 2x^2 - 6x + 2 \\ \hline -6x^2 + 5x \qquad \qquad \qquad \\ -6x^2 + 3x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 2x - 1 \qquad \qquad \qquad \\ 2x - 1 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 2 &= 0 \\ x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ D &= 9 - 4 = 5 \\ x_1 &= (3 - \sqrt{5})/2 \\ x_2 &= (3 + \sqrt{5})/2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x - 2 \mid x - 2 \\ x^3 - 2x^2 \qquad \qquad \qquad \mid x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - 3x \qquad \qquad \qquad \\ 2x^2 - 4x \qquad \qquad \qquad \\ \hline x - 2 \qquad \qquad \qquad \\ x - 2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ D_2 &= 1 - 1 = 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

делитель 120
+
- делитель 1
+ $\frac{1}{1}$ ± $\frac{2}{1}$

$$\begin{array}{r} 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 27x^2 - 14x + 120 \mid x - 2 \\ x^4 - 2x^3 \qquad \qquad \qquad \mid x^3 + 2x^2 - 23x - 60 \\ \hline 2x^3 - 27x^2 \qquad \qquad \qquad \\ 2x^3 - 4x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -23x^2 - 14x \qquad \qquad \qquad \\ -23x^2 + 46x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -60x + 120 \qquad \qquad \qquad \\ -60x + 120 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 23x - 60 \mid x + 3 \\ x^3 + 3x^2 \qquad \qquad \qquad \mid x^2 - x - 20 \\ \hline -x^2 - 23x \qquad \qquad \qquad \\ -x^2 - 3x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -20x - 60 \qquad \qquad \qquad \\ -20x - 60 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 20 &= 0 \\ D &= 1 + 80 = 81 \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= -4 \\ \text{Ответ: } &2, -3, 5, -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 \mid x - 1 \\ x^4 - x^3 \qquad \qquad \qquad \mid x^3 - 4x^2 + 6x - 4 \mid x - 2 \\ \hline 4x^3 + 10x^2 \qquad \qquad \qquad x^3 - 2x^2 \qquad \qquad \qquad \mid x^2 - 2x + 2 \\ \hline 4x^3 + 4x^2 \qquad \qquad \qquad -2x^2 + 6x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 6x^2 - 10x \qquad \qquad \qquad -2x^2 + 4x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 6x^2 - 6x \qquad \qquad \qquad 2x - 4 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -4x + 4 \qquad \qquad \qquad 2x - 4 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -4x + 4 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x^2-2x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \\ D_2 &= 1 - 2 < 0 \Rightarrow \text{корней нет} \end{aligned}$$