Рациональные корни многочлена

Формулировка

В многочлене вида A_nx^n + A_n−1x^n−1 + ... + A_1x^1 + A_0 = 0, A_n! = 0

Рациональные корни следует искать только среди чисел вида или - B_0/B_n, где B_0 - делитель A_0 и B_n - делитель A_n

Доказательство

Лемма 1

Если приведенное уравнение x^n + k_n−1x^n−1 + ... + k_1x^1 + k_0 = 0 имеет целый корень, то он обязательно будет делителем свободного члена k_0

x^n + k_n−1x^n−1 + ... + k_1x^1 = - k_0

x[x^n-1 + k_n−1x^n−2 + ... + k_1x^0] = - k_0

Задача 1

Найти рациональные корни многочленов

-1;1;-½;½.

1) 2x^3 − 7x^2 + 5x − 1|x-½

2x^3-x^2 |2x^2-6x+2

-6x^2+5x

-6x^2+3x

2x-1

2x-1

0

D=9-4=5

x1=(3-v5)/2

x2=(3+v5)/2

Ответ:x1=½;x2=(3-v5)/2;x3=(3+v5)/2.

Задача 2

Решить уравнения УГОЛКОМ

2;-2

0) x^3-0*x^2 − 3x − 2 = 0 | x-2

x^3-2x^2 |x^2+2x+1

2x^2-3x

2x^2-4x

x-2

x-2

0

x^2+2x+1=0 (x+1)^2=0 x=-1

Ответ:2;-1.

Лемма 2

Приведенное уравнение x^n + k_n−1x^n−1 + ... + k_1x^1 + k_0 = 0 не может иметь ни одного дробного корня.

пусть есть дробный корен x=p/q

*(p/q)^n + k_n−1(p/q)^n−1 + ... + k_1(p/q)^1 =- k_0 |*q^n*

*(p)^n + k_n−1(p)^n−1*q^1 + ... + k_1(p)^1*q^(n-1) =- k_0 *q^n*

*k_0 *q^n+ k_n−1(p)^n−1*q^1 + ... + k_1(p)^1*q^(n-1) =- (p)^n*

*q[k_0 *q^n-1+ k_n−1(p)^n−1*q^0 + ... + k_1(p)^1*q^(n-2)]=- (p)^n*

p должно делиться на q

СЛУЧАЙ НЕПРИВИДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

A_nx^n + A_n−1x^n−1 + ... + A_1x^1 + A_0 = 0 | * A_n^(n-1)

A_n^nx^n + A_n−1* A_n^(n-1)x^n−1 + ... + A_1* A_n^(n-1)x^1 + A_0* A_n^(n-1) = 0

(A_n*x)^n + A_n−1* (A_n*x)^n−1 + ... + A_1* A_n^(n-2)*(A_n*x)^1 + A_0* A_n^(n-1) = 0

полагаем A_n*x=y

(y)^n + A_n−1* (y)^n−1 + ... + A_1* A_n^(n-2)*(y)^1 + A_0* A_n^(n-1) = 0

приведенное относительно y

целые корни среди делителей числа A_0* A_n^(n-1)

пусть yi - это один из корней, угаданных нами (т.е. один из делителей)

A_n*x=yi

x=yi/A_n

1) x^4 − 27x^2 − 14x + 120 = 0

x^4-0*x^3 − 27x^2 − 14x + 120|x-2

x^4-2x^3 |x^3+2x^2-23x-60

2x^3-27x^2

2x^3-4x^2

-23x^2-14x

-23x^2+46x

-60x+120

-60x+120

0

x^3+2x^2-23x-60|x+3

x^3+3x^2 |x^2-x-20

-x^2-23x

-x^2-3x

-20x-60

-20x-60

0

x^2-x-20=0

D=1+80=81

x1=5

x2=-4

Ответ:2;-3;5;-4

2) x^4 − 5x^3 + 10x^2 − 10x + 4|x-1

x^4-x^3 |x^3-4x^2+6x-4

-4x^3+10x^2

-4x^3+4x^2

6x^2-10x

6x^2-6x

-4x+4

-4x+4

0

x^3-4x^2+6x-4|x-2

x^3-2x^2 |x^2-2x+2

-2x^2+6x

-2x^2+4x

2x-4

2x-4

0

x^2-2x+2

D=1-2=-1

Ответ:1;2

3) x^4 − 4x^2 + 6x − 4 = 0