Метод Феррари

Дано уравнение 4-ой степени

$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x^1 + A4 = 0$

Цель: выделить полный квадрат

Подсказки:

1) Сделать уравнение приведённым (поделить на коэффициент при старшей степени)

$x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x^1 + B_4 = 0$

2) Сделать замену $x = y + h$, подберите h так, чтобы слагаемое при y^3 занулилось

$y^4 + py^2 + qy^1 + r = 0$

$(y+h)^4+B_1(y+h)^3+B_2(y+h)^2+B_3(y+h)+B_4=0$

$y^4+4y^3h+6y^2h^2+4yh^3+h^4+B_1y^3+3B_1y^2h+3B_1yh^2+B_1h^3+B_2y^2+2B_2yh+$
$+B_2h^2+B_3y+B_3h+B_4=0$

$y^4+y^3(4h+B_1)+y^2(6h^2+3b_1h+B_2)+y(4h^3+3B_1h^2+2B_2h+B_3)+(h^4+B_1h^3+B_2h^2+B_3h+B_4)=0$

$4h+B_1=0$

$h=- B_1/4$

3) Выделить полный квадрат из слагаемых, содержащих y^4 и y^2

$y^4 + py^2 + qy^1 + r = 0$

$y^4+py^2+(p/2)^2-(p/2)^2+qy+r=0$

4) Добавим искусственный параметр α так, чтобы выделенный нами на предыдущем шаге полный квадрат был х-ом в формуле

$x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$

$(y^2+p/2)^2 + 2(y^2+p/2)a + a^2 - (2(y^2+p/2)a + a^2) -(p/2)^2+qy+r=0$

$(y^2+p/2)^2 + 2(y^2+p/2)a + a^2 - (2(y^2+p/2)a + a^2) -(p/2)^2+qy+r=0$

$(y^2+p/2+ a)^2 - (2(y^2+p/2)a + a^2) -(p/2)^2+qy+r=0$

$(y^2+p/2+ a)^2 - 2ay^2-pa-a^2-(p/2)^2+qy+r=0$

$(y^2+p/2+ a)^2 - 2ay^2+qy+(-pa-a^2-(p/2)^2+r)=0$

$(y^2+p/2+ a)^2= 2ay^2-qy+(pa+a^2+(p/2)^2-r)$

5) Вновь получившийся полный квадрат = квадратному трёхчлену относительно y, подберите α так, чтобы стоящий справа квадратный трёхчлен был полным квадратом

$D=q^2-8*a*(pa+a^2+(p/2)^2-r)=0$

$D=q^2-8pa^2-8a^3-2p^2a+8ar=0$

6) Задача подбора α сводится к кубическому уравнению и решается по Формулам Тартальи-Кардано

$-8a^3-8pa^2+a(-2p^2+8r)+q^2=0$

7) Подобрав такое α имеем равенства двух квадратов, из этого получаем разность квадратов

$2ay^2-qy+(pa+a^2+(p/2)^2-r)= (fy+k)^2$

$(y^2+p/2+ a)^2=(fy+k)^2$

$(y^2+p/2+ a)^2-(fy+k)^2=0$

$(y^2+p/2+a-fy-k)(y^2+p/2+a+fy+k)=0$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

$x^2+6x+9=(x+3)^2$

$D=9-9=0$

$x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{d})/2a$

$x^2+6x+9=(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)^2$