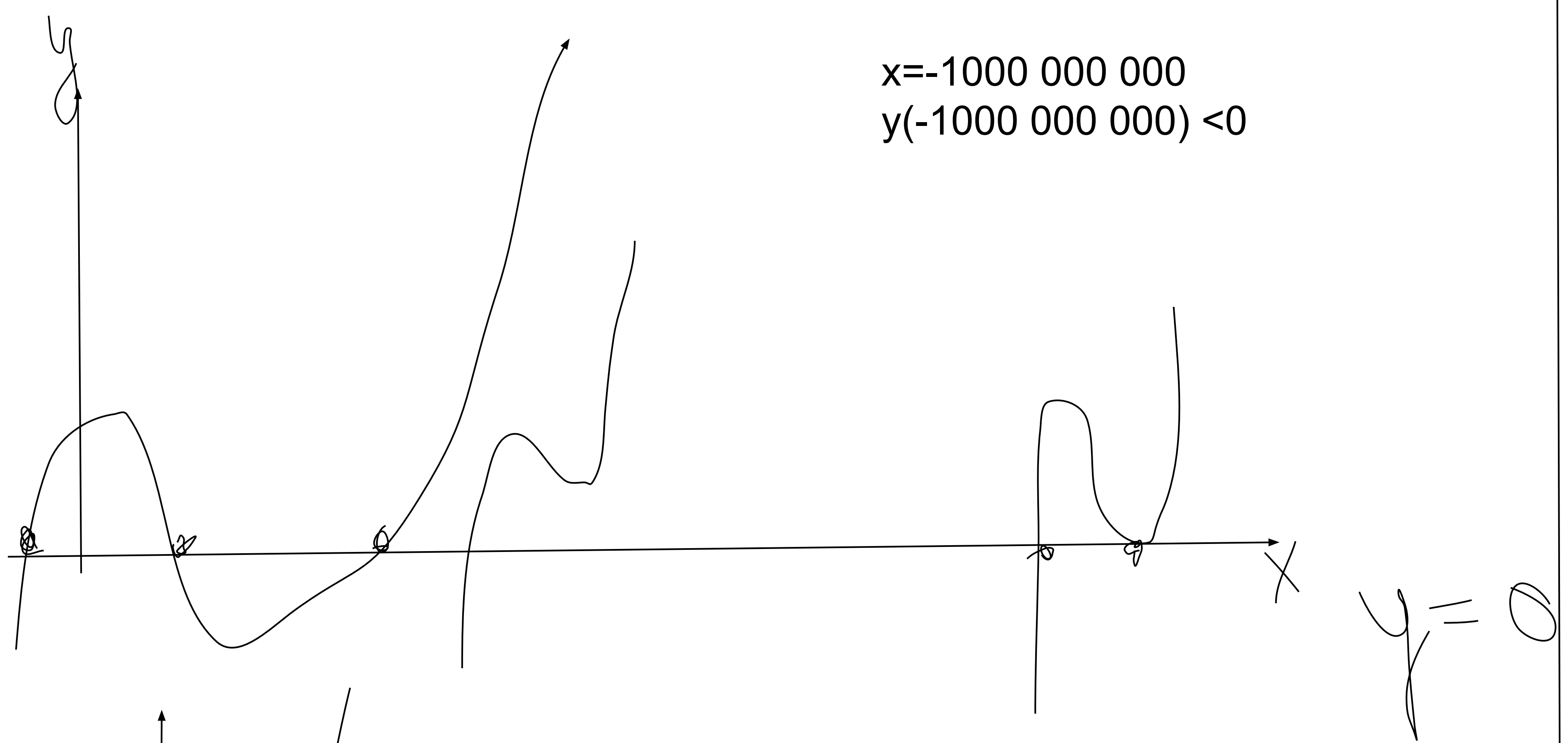
Теорема Гаусса (Основная теорема алгебры)
Всякий отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.
Следствие: в виду теоремы Безу, которая позволяет поделить нацело многочлен на (x-корень) и получит в частном многочлен на единицу меньшей степени можно утверждать, что всякой уравнение n-ой степени имеет ровно n корней над полем комплексных чисел.

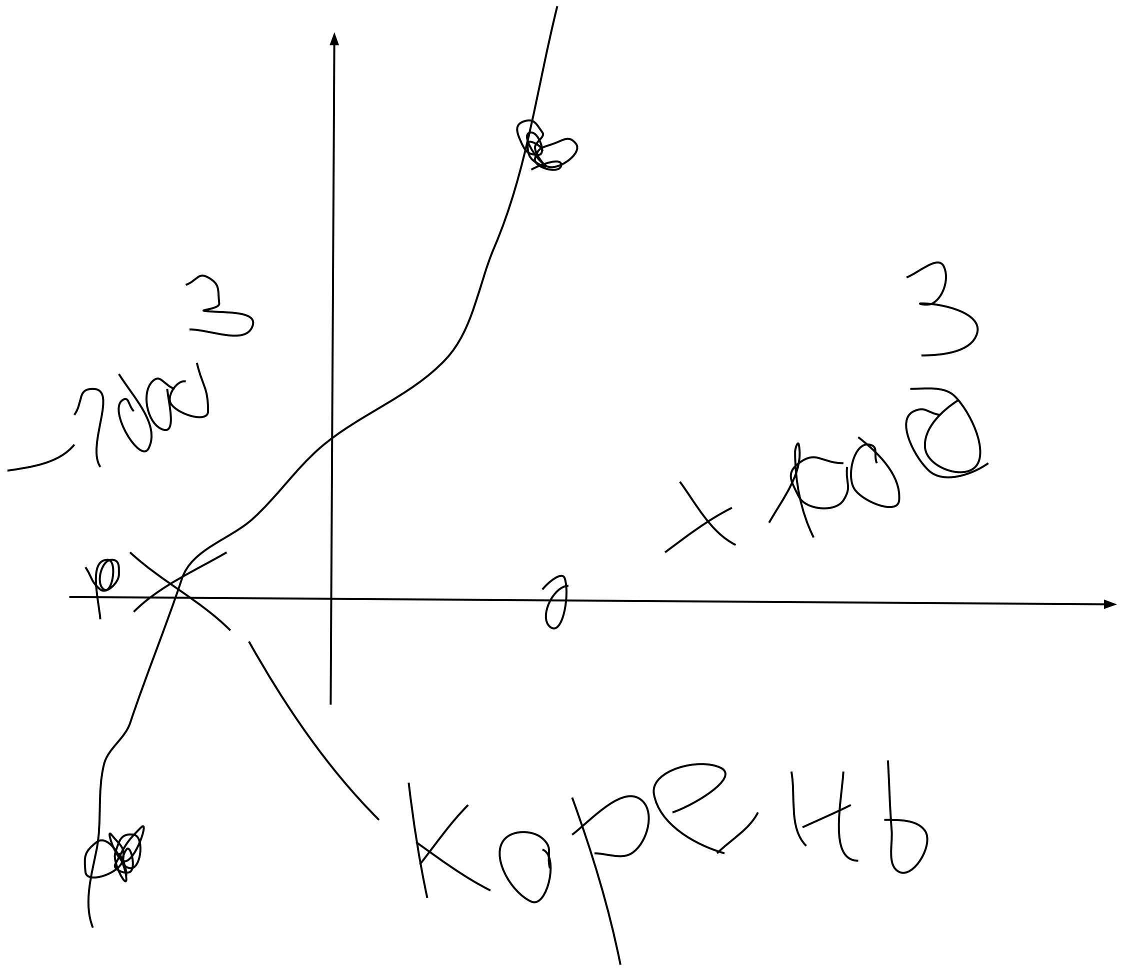
1. Любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень

5x^3 - 7x^2 + 8x +10=0
y(x)=5x^3 - 7x^2 + 8x +10

y(x)=5x^3 - 7x^2 + 8x +10
x=+1000 000 000
y(+1000 000 000) >0

x=-1000 000 000
y(-1000 000 000) <0





2.Любой многочлен n-ой степени с вещественными коэф-тами всегда можно разложить на многочлены 1-ой и 2-ой степени с вещественными коэф-тами

x^3-27=0
(x-3)(x^2+3x+9)=0

i^2=-1

x^3+3x^2*5 + 3x*5^2 + 5^3 =0
(x+5)^3=0

многочлен 10-ой степени=(3-ая степень)*(7-ую степень)

док-во:

по основной теореме алгебры
A_n*x^n + A_(n-1) * x^(n-1) + … + A_2*x^2+A_1*x + A_0=0

у него есть 1 комплексный корень x=a+bi
A_n*(a+bi)^n + A_(n-1) * (a+bi)^(n-1) + … + A_2*(a+bi)^2+A_1*(a+bi) + A_0=0
A_n*(a+bi)^n + A_(n-1) * (a+bi)^(n-1) + …+A_2*(a^2+2abi - b^2) +A_1*(a+bi) + A_0=0
копмплексное число=0
w + i*t = 0
(... + A_2*a^2 -A_2*b^2 +A_1*a + A_0) + i*(... + A_2*2ab + A_1*b) =0
копмплексное число=0 это значит, что его вещественная часть=0 и мнимая часть=0
... + A_2*a^2 -A_2*b^2 +A_1*a + A_0=0
... + A_2*2ab + A_1*b=0

поменяем + между скобками на -
(... + A_2*a^2 -A_2*b^2 +A_1*a + A_0) - i*(... + A_2*2ab + A_1*b) =0
A_n*(a-bi)^n + A_(n-1) * (a-bi)^(n-1) + … + A_2*(a-bi)^2+A_1*(a-bi) + A_0=0
это значит что числа a-bi тоже является корнем нашего ур-ия

(x- (a+bi))(x- (a-bi))(x-u)= (x-a-bi)(x-a+bi)(x-u)=[(x-a)^2-(bi)^2](x-u)=(x^2-2xa+a^2+b^2)(x-u)