Теорема Штольца

(при yn=n эта теорема была открыта еще Коши)

Для определения пределов неопределенных выражений вида xn/yn=oo/oo

Формулировка:

Пусть yn->+oo, причем хотя бы начиная с некоторого места (с некоторого номера) - с возрастанием n и yn возрастает: Y(n+1)>Yn.

Тогда

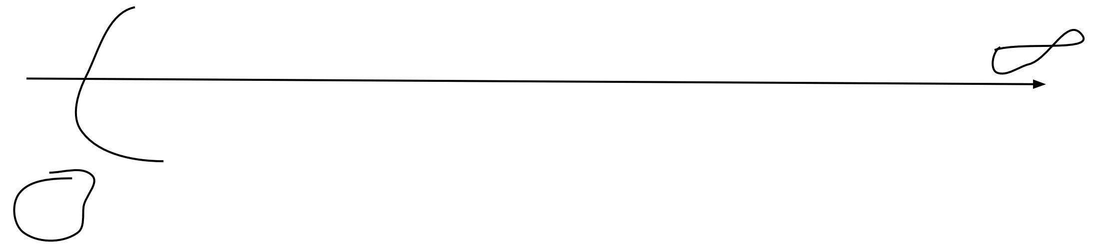
а) если E lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1)) ***конечный*** или бесконечный, то

lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))=lim (Xn/Yn)

то есть искомый lim (Xn/Yn) E и равен исходному lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))

б) если lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1)) !E, то о существовании предела lim (Xn/Yn) мы вообще ничего сказать не можем

Докажите пункт а) для случая конечного предела



Дано:

lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))=A

Yn->+oo <=> для любого числа с найдется номер N: для всех n>N => yn>c

Y(n+1)>Yn начиная с некоторого N1

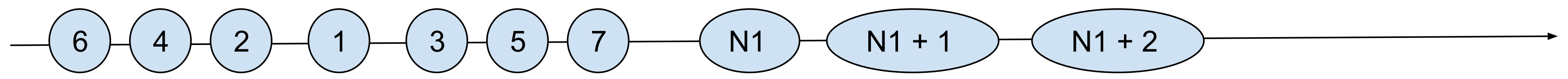
Док-ть:

lim (Xn/Yn) = A ? ⇔ |A-(Xn/Yn)|<e*const ⇔ A-e<Xn/Yn<A+e

|A-(Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))|<e при n>N3

A-e<(Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))<e+A
Yn-Y(n-1)>0 при n>N1
(A-e)*(Yn-Y(n-1))<(Xn-X(n-1))<(e+A) * (Yn-Y(n-1))
при n>N2 yn>0

для любого е возьмем в качестве N в lim (Xn-X(n-1))/(Yn-Y(n-1))=A
возьмем N=max(N1,N2,N3)



для всех n>N => (A-e)*(Yn-Y(n-1))<(Xn-X(n-1))<(e+A) * (Yn-Y(n-1))
А значит оно выполняется для n=N+1,n=N+2,n=N+3…,n=k
(A-e)*(Y(N+1)-Y(N))<(X(N+1)-X(N))<(e+A) * (Y(N+1)-Y(N))
(A-e)*(Y(N+2)-Y(N+1))<(X(N+2)-X(N+1))<(e+A) * (Y(N+2)-Y(N+1))
(A-e)*(Y(N+3)-Y(N+2))<(X(N+3)-X(N+2))<(e+A) * (Y(N+3)-Y(N+2))
…
(A-e)*(Y(k)-Y(k-1))<(X(k)-X(k-1))<(e+A) * (Y(k)-Y(k-1))
СЛОЖИМ ВСЕ НЕРАВЕНСТВА
(A-e)*(Y(k)-Y(N))<(X(k)-X(N))<(e+A) * (Y(k)-Y(N))
k-это любое число, большее N (т е k может меняться, а N при заданном е нет)
е-это некоторое фиксированное любое е, взятое из определения предела lim (Xn/Yn) = A

в силу того, что при любых числах k больших N yk>0 - поделим все неравенство на yk
(A-e)*(Y(k)-Y(N))<(X(k)-X(N))<(e+A) * (Y(k)-Y(N)) | +X(N)
(A-e)*(Y(k)-Y(N))+ X(N)<X(k)<(e+A) * (Y(k)-Y(N))+X(N) |:Y(k)
(A-e)*(1-Y(N)/Y(k))+ X(N)/Y(k)<X(k)/Y(k)<(e+A) * (1-Y(N)/Y(k))+X(N)/Y(k)
(A-e)*(1-Y(N)/Y(k))+ X(N)/Y(k)<X(k)/Y(k)<(e+A) * (1-Y(N)/Y(k))+X(N)/Y(k)
A(1-Y(N)/Y(k))-e(1-Y(N)/Y(k))+X(N)/Y(k)<X(k)/Y(k)<e(1-Y(N)/Y(k))+A(1-Y(N)/Y(k))+X(N)/Y(k)
A-AY(N)/Y(k)-e(1-Y(N)/Y(k))+X(N)/Y(k)<X(k)/Y(k)<e(1-Y(N)/Y(k))+A-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k)
-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k)=b
A+ b-e(1-Y(N)/Y(k))<X(k)/Y(k)<e(1-Y(N)/Y(k))+A+b | -(A+b)
-e(1-Y(N)/Y(k))<X(k)/Y(k)-A-b <e(1-Y(N)/Y(k))
X(k)/Y(k)-A=a
-e(1-Y(N)/Y(k))<a-b <e(1-Y(N)/Y(k))

при k>N => yk>yN, т к
N=max(N1,N2,N3), а при
всех n>N1
yn>yn-1
А значит дробь
yk/yN <1
1>1-yk/yN > 0

-e(1-Y(N)/Y(k))<a-b <e(1-Y(N)/Y(k))
koef=1-yk/yN > 0
-e*koef<a-b <e*koef
|a-b|<e*koef
|a|-|b|<=|a-b|<e*koef
|a|-|b|<e*koef
|a|<e*koef+|b|
|X(k)/Y(k)-A| < e*(1-yk/yN) + |-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k)|
т.к. 1>1-yk/yN > 0, то e*(1-yk/yN) < e
|X(k)/Y(k)-A| < e*(1-yk/yN) + |-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k|<e+|X(k)/Y(k)-A| < e + |-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k)|
|X(k)/Y(k)-A| < e + |-AY(N)/Y(k)+X(N)/Y(k)|
|X(k)/Y(k)-A| < e + |[X(N)-AY(N)]/Y(k)|
X(N)-AY(N)=const
|X(k)/Y(k)-A| < e + |const/Y(k)|
мы можем взять N4 => для всех n>N4 => |const/Y(k)|<e
N=max(N1,N2,N3,N4)
|X(k)/Y(k)-A| < e + |const/Y(k)| < 2e
|X(k)/Y(k)-A| < 2e

-p<T<p ⇔|T|<p при p>0

|a|-|b|<=|a-b|