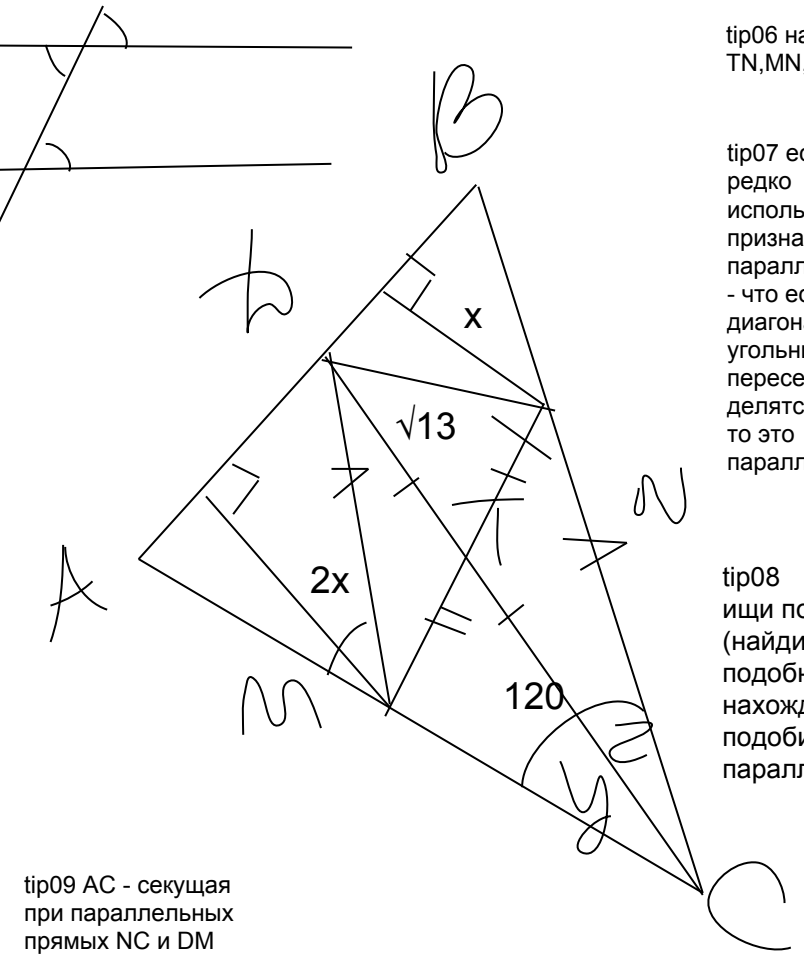


На стороне АВ треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD=\sqrt{13}$ и $\sin(\angle ACD):\sin(\angle BCD)=4:3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$, площадь $\triangle MCN = 3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в 2 раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найти площадь $\triangle ABC$

- tip01 расписать отношение площадей $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$
- tip02 расписать S $\triangle MCN$
- tip03 составить триг-ур-ие на y и z
- tip04 тебе известна CT
- tip05 распиши сумму площадей $\triangle CMT$ и $\triangle CNT$



- tip06 найди TN, MN, MT
- tip07 есть такой редко используемый признак параллелограмма - что если диагонали 4-х угольника точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм
- tip08 ищи подобие (найди 3 попарно подобных 3-ка), в нахождении подобия поможет параллелограмм
- tip09 AC - секущая при параллельных прямых NC и DM
- tip10 найти из подобия BN и AM

$$S(\triangle MCN) = 3\sqrt{3}$$

$$S(\triangle ACD) = \frac{\sin \angle ACD \cdot CD \cdot AC}{2}$$

$$S(\triangle CBD) = \frac{\sin \angle BCD \cdot CB \cdot CD}{2}$$

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CBD)} = \frac{\sin \angle ACD \cdot CD \cdot AC}{\sin \angle BCD \cdot CB \cdot CD} = \frac{\sin \angle ACD \cdot AC}{\sin \angle BCD \cdot CB} = \frac{4}{3}$$

$$S(\triangle MCN) = \frac{\sin C \cdot CN \cdot MC}{2}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot CN \cdot MC}{4}$$

$$3 = \frac{CN \cdot MC}{4}$$

$$CN \cdot MC = 12$$

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle BCD} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin y}{\sin z} = \frac{4}{3}$$

$$y + z = 120$$

$$\frac{\sin(120 - z)}{\sin z} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(\sin 120 \cdot \cos z - \cos 120 \cdot \sin z)}{\sin z} = \frac{4}{3}$$

$$3(\sin 120 \cdot \cos z - \cos 120 \cdot \sin z) = 4 \sin z$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3} \cos z}{2} + \sin z\right) = 4 \sin z$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3} \cos z + \sin z}{2}\right) = 4 \sin z$$

$$3\sqrt{3} \cos z + 3 \sin z = 8 \sin z$$

$$3\sqrt{3} \cos z = 5 \sin z$$

$$\frac{3\sqrt{3} \cos z}{\cos z} = \frac{5 \sin z}{\cos z}$$

$$3\sqrt{3} = 5 \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$3\sqrt{3} = 5 \operatorname{tg} z$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{5} = \operatorname{tg} z$$

$$CT = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$S(\triangle MCT) + S(\triangle CNT) = S(\triangle MCN)$$

$$\left(\frac{\sin y \cdot CT \cdot MC + \sin z \cdot CT \cdot NC}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$CT \left(\frac{\sin(120 - z) \cdot MC + \sin z \cdot NC}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}^2 2z = \frac{\sin^2 2z}{\cos^2 2z} = \frac{1 - \cos^2 2z}{\cos^2 2z} = \frac{1}{\cos^2 2z} - 1 = \frac{1 - \cos^2 2z}{\cos^2 2z} = \frac{1}{\cos^2 2z} - 1$$

$$\operatorname{tg}^2 2z = \frac{1}{\cos^2 2z} - 1$$

$$\operatorname{tg}^2 2z + 1 = \frac{1}{\cos^2 2z}$$

$$\frac{1}{(\operatorname{tg}^2 2z + 1)} = \cos^2 2z$$

$$\frac{1}{\sqrt{27/25 + 1}} = \cos z$$

$$\frac{1}{\sqrt{52/25}} = \cos z$$

$$\frac{1}{\sqrt{52/25}} = \cos z$$

$$\frac{5}{2\sqrt{13}} = \cos z$$

$$\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 2z} = \sqrt{1 - 25/52} = \sqrt{27/52} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$$\sin(120 - z) = \sin 120 \cdot \cos z - \cos 120 \cdot \sin z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{V13(2\sqrt{3}/\sqrt{13} \cdot MC + 3\sqrt{3}/(2\sqrt{13}) \cdot NC)}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$MC \cdot 2\sqrt{3}/\sqrt{13} + NC \cdot 3\sqrt{3}/(2\sqrt{13}) = 12\sqrt{3}/\sqrt{13}$$

$$\frac{(MC \cdot 4\sqrt{3} + NC \cdot 3\sqrt{3})}{2\sqrt{13}} = 12\sqrt{3}/\sqrt{13}$$

$$V3(MC \cdot 4 + NC \cdot 3)/(2\sqrt{13}) = 12V3/\sqrt{13}$$

$$(4MC + 3NC)/(2\sqrt{13}) = 12/\sqrt{13}$$

$$4MC + 3NC = 24$$

$$NC = u$$

$$MC = t$$

$$u \cdot t = 12$$

$$4t + 3u = 24$$

$$t = \frac{24 - 3u}{4}$$

$$u \cdot \frac{24 - 3u}{4} = 12$$

$$t = \frac{24 - 3u}{4}$$

$$24u - 3u^2 = 48$$

$$t = \frac{24 - 3u}{4}$$

$$24u - 3u^2 - 48 = 0$$

$$t = \frac{24 - 3u}{4}$$

$$-3u^2 + 24u - 48 = 0$$

$$u^2 - 8u + 16 = 0$$

$$(u - 4)^2 = 0$$

$$u = 4$$

$$t = \frac{24 - 3 \cdot 4}{4} = \frac{24 - 12}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$NC = 4$$

$$MC = 3$$

$$MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2MC \cdot NC \cdot \cos C = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 120 = 25 + 24 \cdot \frac{1}{2} = 37$$

$$MN = \sqrt{37}$$

$$NT^2 = NC^2 + TC^2 - 2 \cdot TC \cdot NC \cdot \cos z = 16 + \frac{13}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} = \frac{77}{4} - 10 = \frac{37}{4}$$

$$NT = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$MT = MN - NT = \sqrt{37} - \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

В чертырехуг DNCM диагонали делятся пополам => DNCM-параллелограм => DN=MC DM=NC

ADM ~ ABC (по уг A и соответственным углам при параллельных прямых NC и DM и сек AC)

BDN ~ ABC (по уг B и соответственным углам при параллельных прямых DN и MC и сек BC)

$$\frac{BN}{AB} = \frac{DB}{AD} = \frac{DN}{AM} = \frac{1}{2}$$

$$BN = 2$$

$$DN = 3$$

$$AM = 6$$

$$BC = BN + NC = 6$$

$$AC = AM + MC = 9$$

$$AB^2 = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 117 + 54 = 171 \quad AB = \sqrt{171}$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{\sin C \cdot AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 9 \cdot 6}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$