$\forall\ e>0\ \exists\ N(e)>0 :\ \forall\ n>N \Rightarrow |x_n-a|<e\cdot const$

рассмотрим эти определения, выполненные одновременно,
e в обоих определениях одна и та же

Задача 5. Докажите эквивалентность двух приведенных формулировок.

Задача 6. Докажите, что $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Задача 7. Докажите, что $\lim (a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

Задача 8. Что значит, что число a не есть предел последовательности a_n? Сформулируйте не употребляя отрицаний.

Дано

1) $\forall\ e>0\ \exists\ N1(e)>0 :\ \forall\ n>N1 \Rightarrow |a_n-a|<e$ — $\lim(a_n)=a$

2) $\forall\ e>0\ \exists\ N2(e)>0 :\ \forall\ n>N2 \Rightarrow |b_n-b|<e$ — $\lim(b_n)=b$

$\forall\ e>0\ \exists\ N(e)>0 :\ \forall\ n>N \Rightarrow |a_n + b_n - a - b|<e$ — $\lim(a_n+b_n)=a+b$

Найти

$\forall\ e>0\ \exists\ N(e)>0 :\ \forall\ n>N \Rightarrow |a_n + b_n - a - b|<2e$

$a + e > a_n > a - e$

$b + e > b_n > b - e$

$a + b + 2e > a_n + b_n > a + b - 2e$

$N=N_1+N_2$

$N=\max(N_1,N_2)=N_1$

$a_n=(-1)^n$
$b_n=(-1)^{(n+1)}$
$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{(n+1)}=(-1)^n(1 - 1) = 0$
$\lim(a_n+b_n)=0$
$\lim(a_n)=?$ не существует
$\lim(b_n)=?$ не существует

$\lim(a_n+b_n)=\lim(a_n)+\lim(b_n)$
слева направо
верно только тогда, когда пределы справа существуют

$\lim(a_n)+\lim(b_n) =\lim(a_n+b_n)$
справа налево
верно всегда