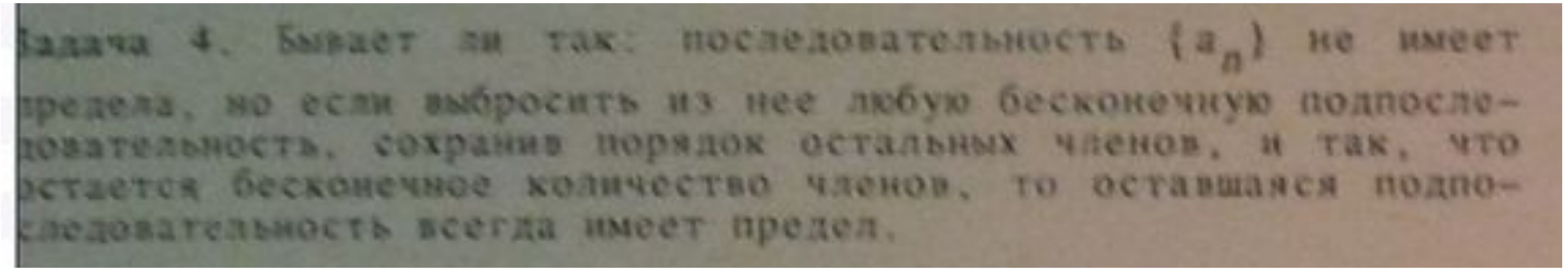
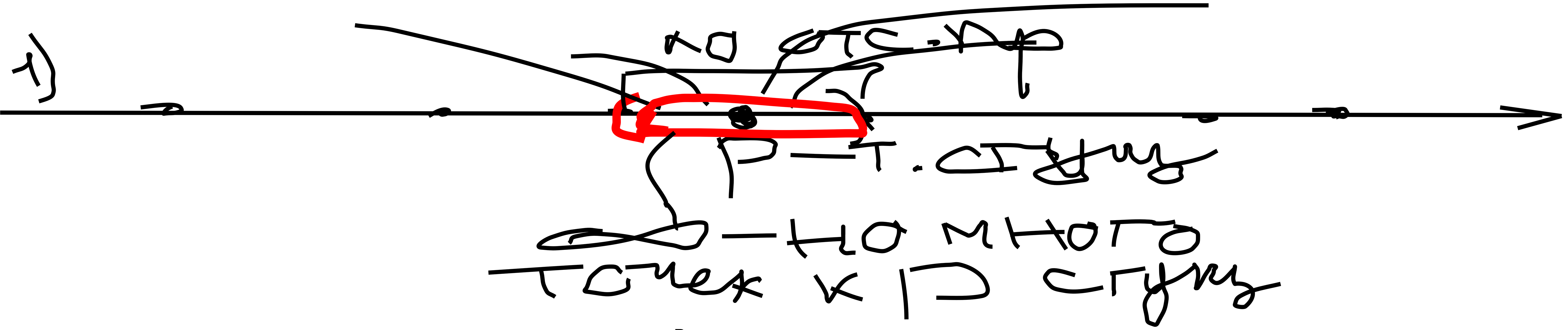
$\forall\ e>0\ \exists\ N(e)>0 : \forall\ n>N \Rightarrow |x_n-a|<e*const$


Задача 4. Бывает ли так: последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, но если выбросить из нее любую бесконечную подпоследовательность, сохранив порядок остальных членов, и так, что остается бесконечное количество членов, то оставшаяся подпоследовательность всегда имеет предел.

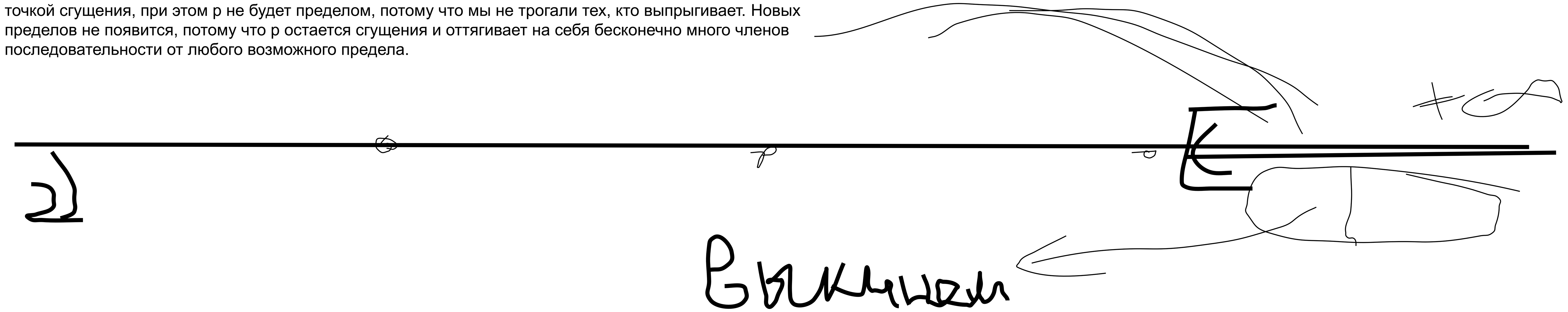
<u>выкинем каждое второе, из тех кто выпрыгнул</u> - таким образом мы выкинем бесконечное, останется бесконечное, и при этом предела не будет

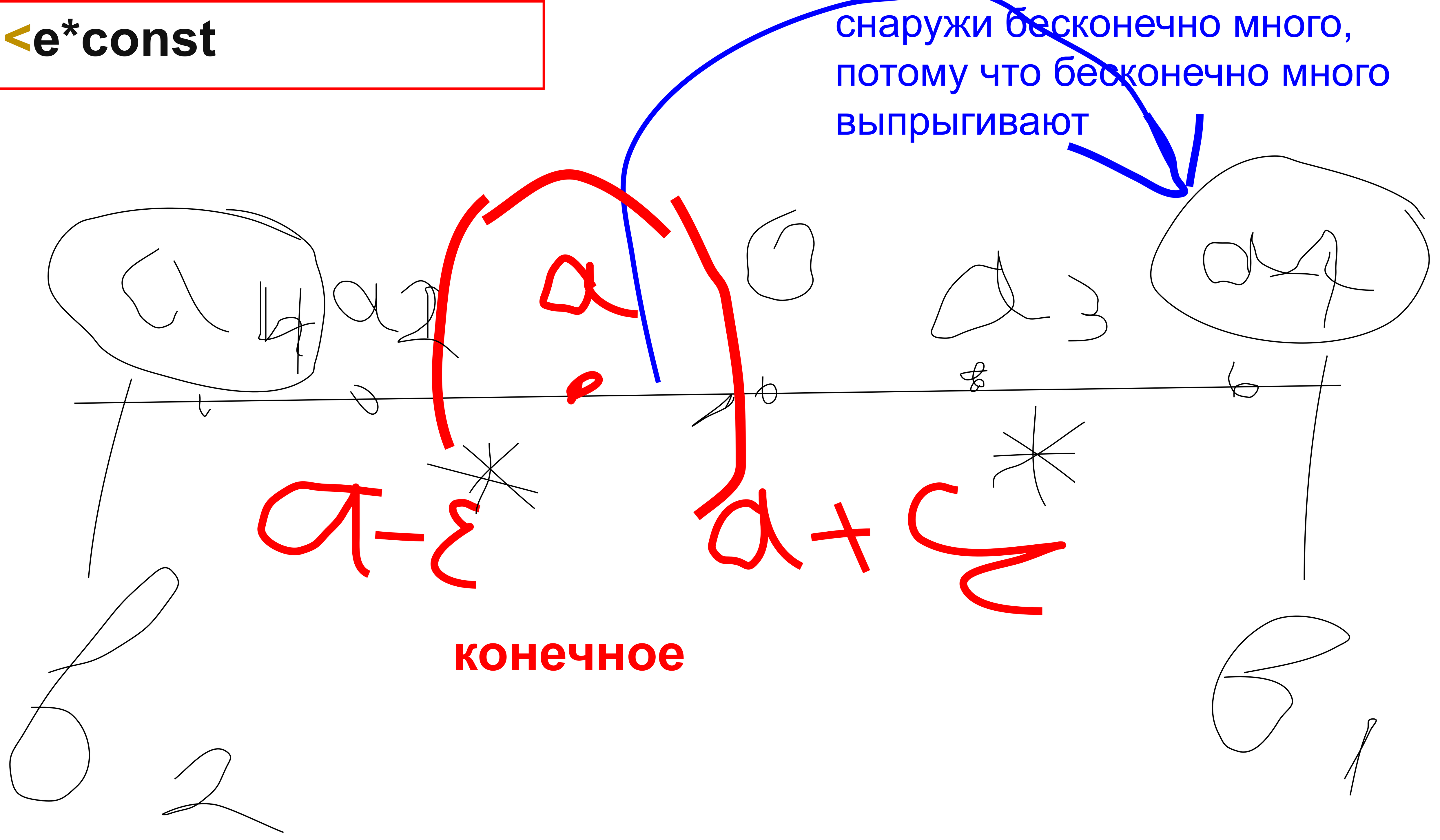
Ответ к задаче: не бывает

если у последовательности нет предела в точке А, то всегда можно выкинуть бесконечно много членов, так что по-прежнему не будет предела в точке А (для этого надо выкинуть каждого второго, кто выпрыгивает из некоторой окрестности числа А) Но после такого выкидывания предел может появиться в какой-нибудь другой точке.



выкинем половину тех, кто к р сгущается, вторая половина продолжит сгущаться, т.е. Р останется точкой сгущения, при этом р не будет пределом, потому что мы не трогали тех, кто выпрыгивает. Новых пределов не появится, потому что р остается сгущения и оттягивает на себя бесконечно много членов последовательности от любого возможного предела.





$\exists\ e>0\ \forall\ N(e)>0 : \exists\ n>N \Rightarrow |x_n-a|>=e*const$

нет предела в точке а:
найдётся такая окрестность е*, из которой члены последовательности будут регулярно выпригивать вплоть до бесконечности. (т.е. сколь большой номер ни взять - найдётся больший, который выпрыгнет)

мы выяснили, что если выкинуть тех, кто выпрыгивает, то предел будет. Но мы не выбираем

при выкидывании кого предела не будет после выкидывания?

выкинуть подпоследовательность - это выкинуть бесконечно много элементов последовательности, в окрестности может не быть бесконечно много элементов