

Бывает ли так: последовательность не имеет предела, но если выбросить из нее любую бесконечную подпоследовательность, сохраняя порядок остальных членов, и так, что остается бесконечное количество членов, то оставшаяся последовательность всегда имеет предел.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots$

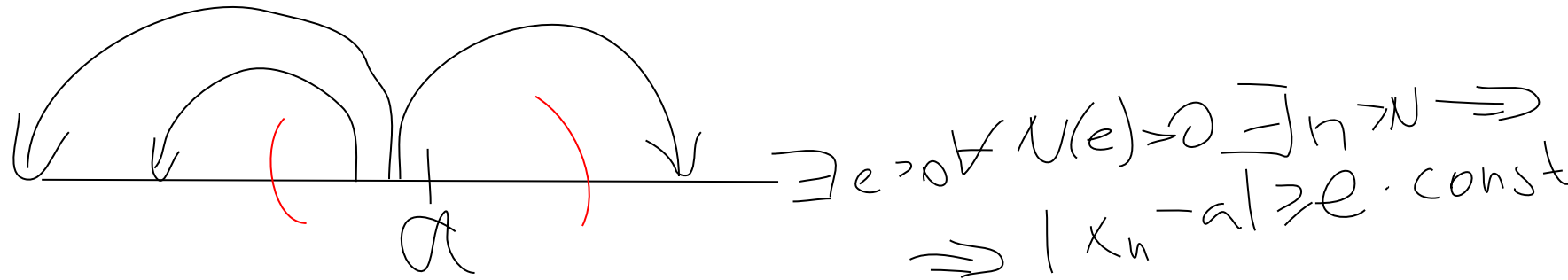
$a_2, a_7, a_9, a_{15}, \dots$

бесконечный красный кусок - подпоследовательность

$a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$

исходная последовательность (не имеющая предела) после выбрасывания красного куска - остался бесконечный кусок

Может ли быть такое, что теперь оставшаяся после выбрасывания бесконечная часть ВСЕГДА имеет предел



**1 case**  
последовательность неограниченная (п-ть либо в обе стороны, либо в одну из сторон - но разлетается в бесконечность)

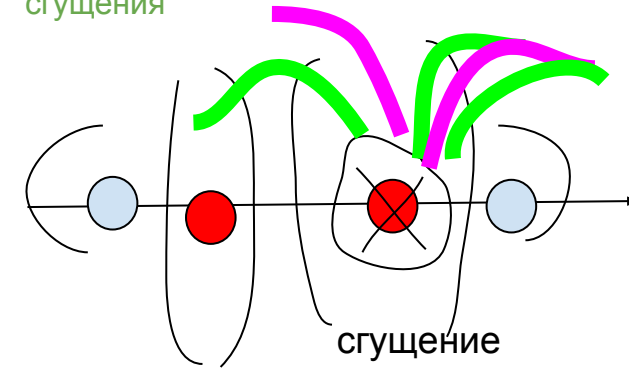
**2 case**  
последовательность ограниченная (найдется какой-то интервал, что вся последовательность внутри него)

пример

рассмотрим последовательность, состоящую из всех натуральных чисел  $\{1; 2; 3; 4; \dots\}$

подпоследовательность - каждое четное число

Если последовательность ограниченная, то вспомним лемму Больцано-Вейрштрасса о том, что бесконечное множество на отрезке имеет ПРЕДЕЛЬНУЮ ТОЧКУ, а значит наша бесконечная ограниченная последовательность имеет точку сгущения



Но эта точка сгущения не будет пределом, т.к. вокруг нее есть отпрыгивающие.

Предположим, что верно условие задачи и после выбрасывания любой подпоследовательности предел возникнет. Если он возникнет, то он обязан совпадать с этой точкой сгущения, потому что не может быть наличие предела и отличной от него точки сгущения. Значит выкинем из нашей последовательности каждого второго из отпрыгивающих в надежде обрести предел в точке сгущения, но оставшиеся отпрыгивающие по-прежнему не дадут случиться пределу, тем самым условие задачи невозможно, потому что мы привели пример выкинутой подпоследовательности, после выкидывания которой не возникло предела.