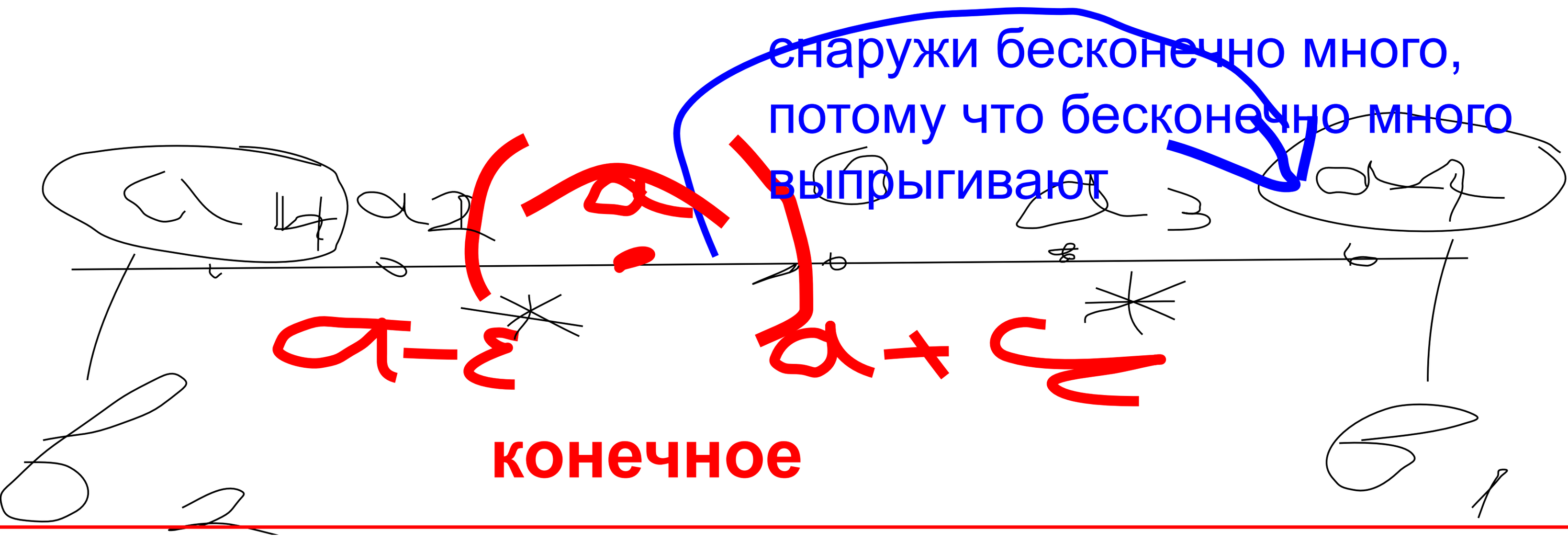
$\forall\ e>0\ \exists\ N(e)>0 :\ \forall\ n>N \Rightarrow |x_n-a|<e*const$

Задача 4. Бывает ли так: последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, но если выбросить из нее любую бесконечную подпоследовательность, сохранив порядок остальных членов, и так, что остается бесконечное количество членов, то оставшаяся подпоследовательность всегда имеет предел.



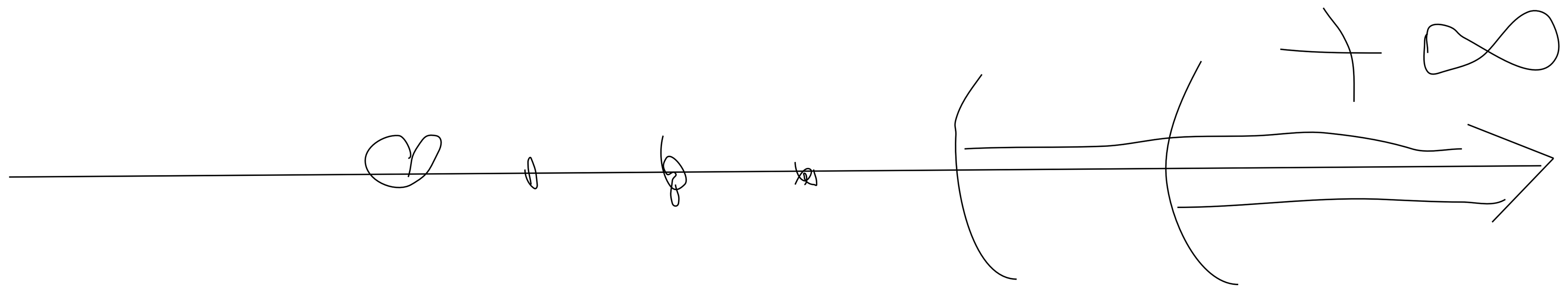
$\exists\ e>0\ \forall\ N(e)>0 :\ \exists\ n>N \Rightarrow |x_n-a|>=e*const$

Утверждение: если у последовательности нет предела, то у неё обязательно найдётся точка сгущения (конечная или бесконечная)

$\forall\ e>0\ \forall\ N(e)>0 :\ \exists\ n>N \Rightarrow |x_n-a|<e*const$

определение конечной точки сгущения

как бы близко ты к “a” ни подкрался, там обязательно рядом с “a” в окрестности найдется какой-то элемент последовательности. Т.е. не все элементы последовательности обязательно будут сгущаться к “a” как в определении предела, но какие-то точно будут сгущаться



сгущение к бесконечной точке

как бы близко ты ни подкрался к +oo, то там обязательно будут члены последовательности рядом с бесконечностью

окрестность бесконечности - это лучи в направлении бесконечности

$\forall\ e>0\ \forall\ N(e)>0 :\ \exists\ n>N \Rightarrow$ x_n правее луча, задаваемого e

$\forall\ e>0\ \forall\ N(e)>0 :\ \exists\ n>N \Rightarrow x_n>e$ [+oo точка сгущения]

$\forall\ e>0\ \forall\ N(e)>0 :\ \exists\ n>N \Rightarrow x_n<-e$ [-oo точка сгущения]

$\exists\ e>0\ \forall\ n \Rightarrow |x_n| < e$ [ограниченная послед]

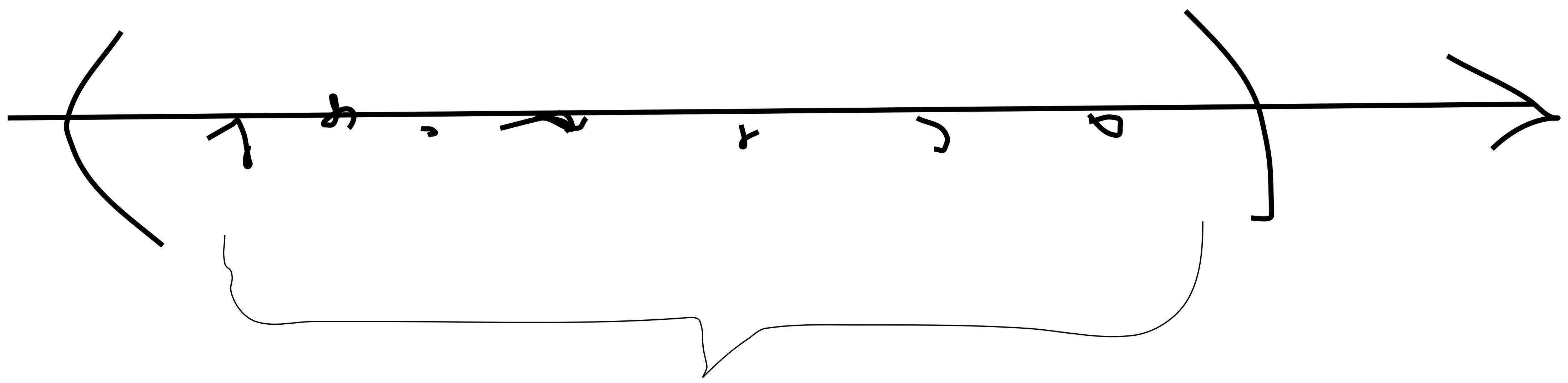
$\forall\ e>0\ \exists\ n \Rightarrow |x_n|>=e$ [неограниченная послед]

Более сильное Утверждение: у последовательности обязательно найдётся точка сгущения (конечная или бесконечная)

Если есть предел, то сам предел будет точкой сгущения

ДОК-ВО:

1) Если нет бесконечных точек сгущения, то последовательность ограниченная



счётное количество точек последовательности

ДЗ

1) попытаться доказать теорему о том, что у ограниченной последовательности есть точка сгущения

2) почему если последовательность неограниченная хотя бы с одной стороны, то будет бесконечная точка сгущения

3) подумать как с помощью теоремы о точке сгущения решить нашу задачу

4) решать листок 23-24 начиная с 5-ой задачи и дальше