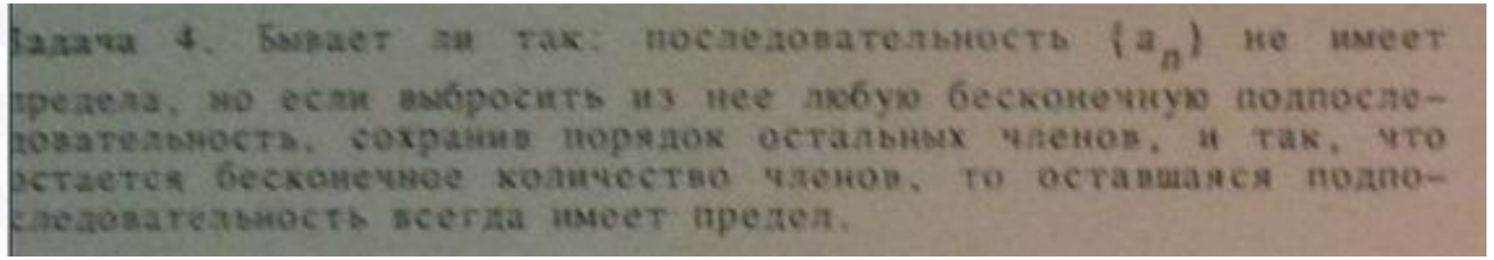
$\forall$ e>0 $\exists$ N(e)>0 : $\forall$ n>N => |x_n-a|<e*const

Более сильное Утверждение: у последовательности обязательно найдётся точка сгущения (конечная или бесконечная)


Задача 4. Бывает ли так: последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, но если выбросить из нее любую бесконечную подпоследовательность, сохранив порядок остальных членов, и так, что остается бесконечное количество членов, то оставшаяся подпоследовательность всегда имеет предел.

1.Последовательность ограничена
2,Последовательность не ограничена

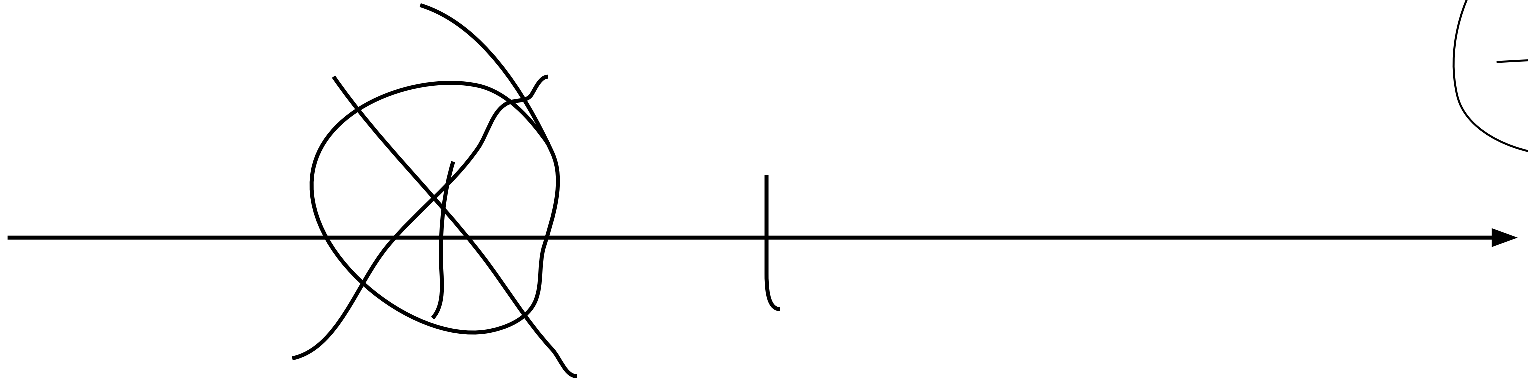
$\exists e>0 \ \forall n>0 \Rightarrow |x_n|<e$

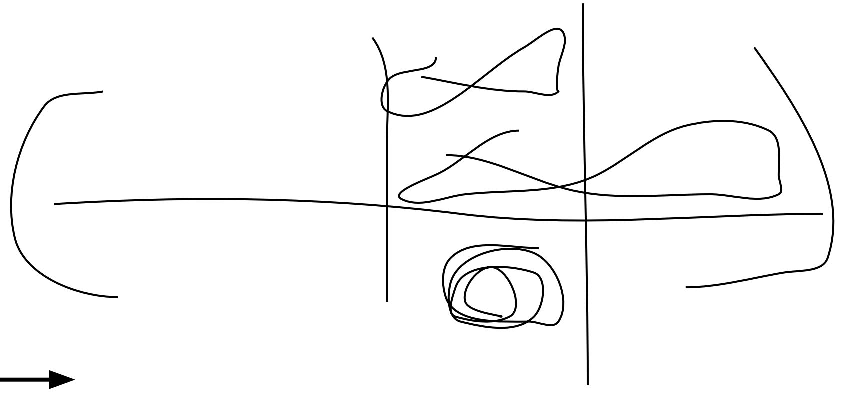
Пусть оставшаяся подпоследовательность не всегда имеет предел, тогда подпоследовательность остается беспредельной

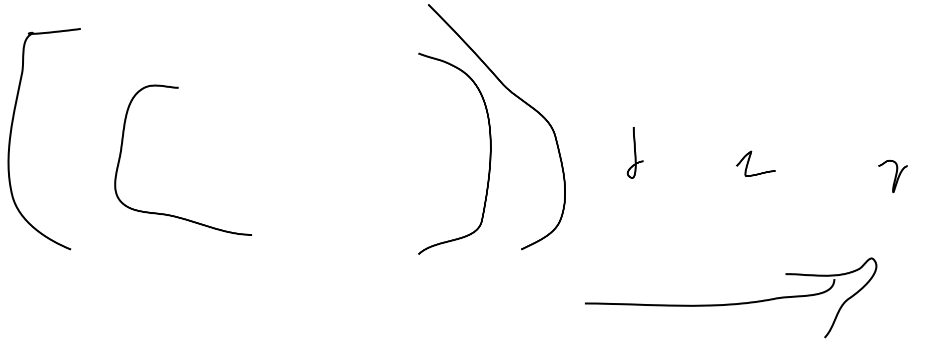
b1,b2,b3,b4,b5...

b1,b3,b5,...

b2,b4,b6...







Если последовательность не имеет предела, последовательность имеет как минимум две точки сгущения(конечных, бесконечных). Пусть последовательность из задачи нашлась. Тогда при выбрасывании какой-то последовательности b1,b2,b3,b4,b5,b6… Оставшаяся часть исходной последовательности будет иметь предел, то есть все точки сгущения кроме одной этим выбрасывание уничтожатся. Это значит, что выбрасываемая подпоследовательность b1… имеет уничтоженные точки своими точками сгущения, значит если вместо b1,b2,b3,b4,b5,b6 выбросим b1,b3,b5… останется b2,b4,b6…, которые будут иметь своими точками сгущения уничтоженные точки из первого выбрасывания, значит оставшаяся последовательность не будет иметь предел.