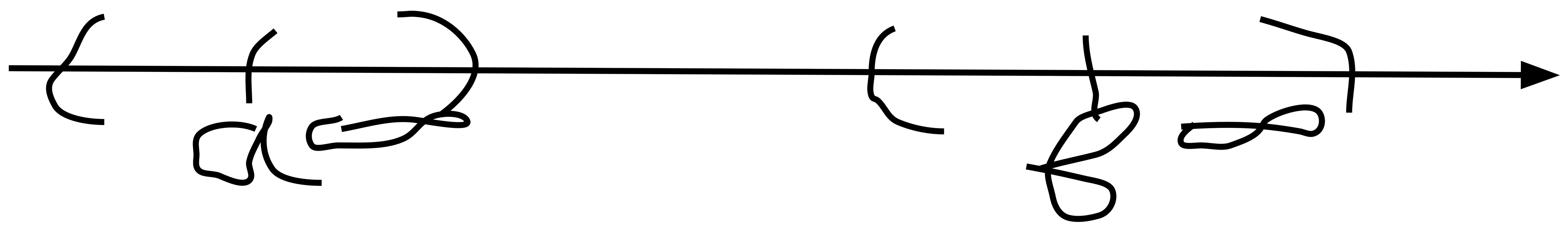
Задача 8. Докажите теорему:
Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда выполняются два условия:
1. Последовательность ограничена,
2. Она имеет не более одной предельной точки.

∀ e>0 ∃ N(e)>0 : ∀ n>N => |a_n-a|<e*const
определение предела

∀ e>0 ∃ N(e)>0 : ∃ n>N => |a_n-a|<e*const
определение предельной точки

Если есть предел, докажем, что выполнены пункты 1 и 2:
1)Пусть e>0 & e=100, для него найдётся N=10^6, после которого все лежат в е окрестности предела а. Вне е окрестности конечное число элементов => как ограничение можно взять конкретное число(MIN = min (a1,a2,....,aN-1, a-e), MAX = max(a1,a2,....,aN-1, a-e)), а значит последовательность ограничена

2)Пусть будет хотя бы 2 предельные точки, а это значит, что в любой окрестности каждой из них будет бесконечное число точек. Главное взять достаточно маленькие окрестности так, чтобы они не пересекались, тогда окрестность предела вместит бесконечность, а вне должна быть конечность. А вне тоже будет бесконечность из-за второй предельной точки, противоречие



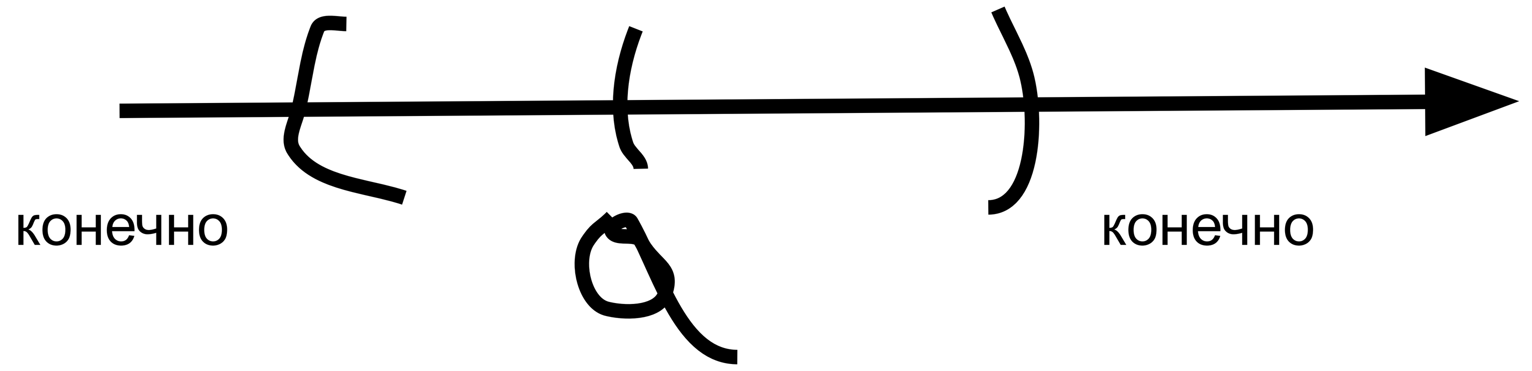
Если выполнены условия 1 и 2, докажем, что есть предел.
Берём e>0, e=100,
она имеет не более одной (конечной) предельной точки => либо одна конечная, либо не одной

если бы не было ограниченности могло бы быть так, что нет ни одной конечной и есть хотя бы одна бесконечная, но т к есть первое условие такого не может=> не может быть бесконечной предельной точки, а значит точно есть хотя бы одна конечная. А по условию ровно 1 конечная предельная точка (точка сгущения).

иными словами нам надо доказать, что последовательность имеющая ровно 1 конечную предельную точку имеет предел в этой точке

есть 2 варианта

1. какую бы окрестность предельной точки а ни взять => вне этой окрестности всегда будет оказываться конечное число членов последовательность=> тогда точно есть предел



2.найдутся такие окрестности предельной точки а => вне этих окрестностей будут бесконечные количества точек

тогда в этой бесконечности снаружи найдется конечная предельная точка, а это противоречит пункту 2