

В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

диофантовы уравнения
(уравнения в целых числах)

$$27x + 16y = 1$$

Метод спуска при решении диофантовых уравнений

делим 27 на 16 с остатком

$$(1 \cdot 16 + 11)x + 16y = 1$$

$$1 \cdot 16x + 11x + 16y = 1$$

$$16(1 \cdot x + y) + 11x = 1$$

замена переменной

$$1 \cdot x + y = t$$

$$16t + 11x = 1$$

делим 16 на 11 с остатком

$$(1 \cdot 11 + 5)t + 11x = 1$$

$$1 \cdot 11 \cdot t + 5t + 11x = 1$$

$$11(1 \cdot t + x) + 5t = 1$$

замена переменной

$$1 \cdot t + x = z$$

$$11z + 5t = 1$$

делим 11 на 5 с остатком

$$z(2 \cdot 5 + 1) + 5t = 1$$

$$2 \cdot 5z + 1 \cdot z + 5t = 1$$

$$5(2z + t) + 1 \cdot z = 1$$

замена переменной

$$2z + t = p$$

$$5p + z = 1$$

угадываем частное решение

$$z = 6, p = -1$$

поднимаемся обратно по заменам

$$2z + t = p$$

$$2 \cdot 6 + t = -1$$

$$t = -13$$

$$1 \cdot t + x = z$$

$$1 \cdot (-13) + x = 6$$

$$x = 19$$

$$1 \cdot x + y = t$$

$$1 \cdot 19 + y = -13$$

$$y = -32$$

частное решение для $27x + 16y = 1$

$$x_0 = 19, y_0 = -32$$

$$27 \cdot 19 - 16 \cdot 32 = 1$$

пишем общее решение

$$x = x_0 - bt$$

$$y = y_0 + at$$

$$x = 19 - 16t$$

$$y = -32 + 27t$$

какое-то другое частное решение

$$t = 5$$

$$x = 19 - 16 \cdot 5 = -61$$

$$y = -32 + 27 \cdot 5 = 103$$

$$27 \cdot (-61) + 16 \cdot 103 = 1$$

нок 432

$$ax + by = d$$

$$\text{НОД}(a, b) = k$$

if $d \% k == 0$:

то делим

else:

нет решений

$$6x - 9y = 10$$

нет решений

$$\text{НОД}(6, 9) = 3$$

$10 \% 3 \neq 0 \Rightarrow$ нет решений в целых чисел

Если уравнение $ax + by = d$ имеет частное решение x_0, y_0

т.е. верно равенство

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = d$$

то общее решение

выписывается по следующим формулам

$$x = x_0 - bt$$

$$y = y_0 + at$$

где t - произвольное целое число

$$27 \cdot 3 = 81$$

$$16 \cdot 5 = 80$$

$$81 - 80 = 1$$

$$27 \cdot 3 - 16 \cdot 5 = 1$$



ПРОВЕРКА

$$ax + by = d$$

$$a(x_0 - bt) + b(y_0 + at) = d$$

$$ax_0 - abt + by_0 + bat = d$$

$ax_0 + by_0 = d$ - оно верно было по условию, по предположению, а значит в силу равносильных переходов верно и

$$a(x_0 - bt) + b(y_0 + at) = d$$

а значит

$$x = x_0 - bt$$

$$y = y_0 + at$$

действительно какие-то решения нашего уравнения