

7.15. Докажите, что квадратные корни из комплексного числа $z = a + ib$ находятся среди чисел

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

Как нужно выбрать знак перед вторым слагаемым в скобке, чтобы получить два нужных корня, а не сопряженные к ним числа? (См. также 5.24.)

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos t + i \sin t) \\ w &= |w|(\cos r + i \sin r) \\ w^2 &= |w|^2(\cos 2r + i \sin 2r) \\ |z|(\cos t + i \sin t) &= |w|^2(\cos 2r + i \sin 2r) \\ |z| &= |w|^2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{\left(\frac{|z|+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{|z|-a}{2}\right)^2} = |z| \quad \text{тождество} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 2r + 2\pi k = \arccos(a/|z|) \\ r &= t/2 - \pi k = \arccos(a/|z|)/2 - \pi k \end{aligned}$$

Дз дорешать эту, 7.22, 7.23, 7.29.

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ w &= p + qi \\ w^2 &= p^2 - q^2 + 2pqi \end{aligned}$$

$$a + bi = p^2 - q^2 + 2pqi$$

$$\begin{aligned} a &= p^2 - q^2 \\ b &= 2pq \\ p &= b/2q \\ a &= b^2/4q^2 - q^2 \\ -q^4 - aq^2 + b^2/4 &= 0 \\ q^4 + aq^2 - b^2/4 &= 0 \\ D &= a^2 + b^2 \\ q^2 &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ q^2 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ q_1, q_2 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1, p_2 &= b / \pm 2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ p_1 &= b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} / \pm 2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \\ p_1 &= + = q_1 = + \\ p_2 &= - = q_2 = - \end{aligned}$$