

7.22. Пусть точка  $z$  движется по единичной окружности против часовой стрелки. Опишите движение следующих точек

- а)  $2z^2$ ;    в)  $3z + z^2$ ;    д)  $(z - i)^{-1}$ ;    ж)  $Rz + \rho z^n$  ( $\rho < R$ ).  
 б)  $z + 3z^2$ ;    г)  $z^{-3}$ ;    е)  $(z - 2)^{-1}$ ;

а)  
 $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 1$   
 $|z| = 1$   
 $\cos \alpha + i \sin \alpha = 1$   
 $2z^2 = 2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

б)  
 $z + 3z^2 = \cos \alpha + i \sin \alpha + 3\cos 2\alpha + 3i \sin 2\alpha = (6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 3) + i(\sin \alpha + 6\cos \alpha)$

$$\cos \frac{\rho}{2} + i \sin \frac{\rho}{2}$$

$z = a + bi$   
 $a^2 + b^2 = 1$   
 $a^2 = 1 - b^2$   
 $z + 3z^2 = a + bi + 3a^2 - 3b^2 + 6abi = (a + 3a^2 - 3b^2) + i(6ab + b)$   
 $|z + 3z^2| = \sqrt{a^2 + 9a^4 + 9b^4 + 6a^3 - 6b^2a - 18a^2b^2 + 36a^2b^2 + b^2 + 12ab^2} =$   
 $= \sqrt{6a^3 - 6b^2a + 12ab^2 + 10} = \sqrt{6a(a^2 + b^2) - 6b^2a + 6ab^2 + 10} = \sqrt{6a + 10}$   $a \in [-1; 1]$   
 $|z + 3z^2| \in [2; 4]$

