Определения. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей, если $n < m \Rightarrow a_n < a_m$.
Последовательность $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $n < m \Rightarrow a_n \le a_m$.
Аналогичны определения убывающей и невозрастающей последовательностей.
Все такие последовательности называются монотонными, а возрастающая и убывающая – строго монотонными.

Задача 1. Докажите теорему:
Пусть последовательность $\{a_n\}$ неубывающая. Тогда если одна из величин $\sup\{a_n\}$ и $\lim a_n$ существует, то и другая существует, и они равны.

Sup M множества X :

1) для любого xэX => x<=M
2) для любого e>0 найдется xэX => x>M-e

Пусть есть lim(a_n) и неубывающая последовательность, тогда последовательность ограниченная, тогда у нее есть верхняя грань, тогда у нее есть точная верхняя грань
Любой xэF <= lim(a_n), так как пусть найдется элемент больше lim(a_n), тогда все последующие элементы будут больше этого, так как это неубывающая последовательность, тогда не все элементы последовательность попадут в окрестность lim(a_n) начиная с некоторого номера.
Так как xэF <= lim(a_n), тогда можно утверждать, что для любого e>0 найдется xэF => x>lim(a_n)-e(это произойдет так как в любую e окрестность lim(a_n) попадет бесконечное количество членов, соответственно попадет хотя бы один.

Пусть есть sup M и неубывающая последовательность
Рассмотрим произвольную e окрестность M, тогда начиная с некоторого номера в эту окрестность попадут все члены последовательности(так как последовательность неубывающая и в любой окрестности точки M найдется элемент последовательности по определению sup, а значит все элементы большие него тоже там окажутся), тогда точка M будет являтся и пределом для последовательности.