

Задача 3. Докажите, что из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся (то есть имеющую предел) подпоследовательность.

По теореме Больцано-Вейерштрасса в каждой ограниченной последовательности (как в множестве) найдется хотя бы одна точка сгущения a . Возьмем некоторую ϵ окрестность точки a , в ней найдется хотя бы одна точка последовательности x_1 . Теперь найдем более узкую окрестности точки a , чтобы она не содержала точку x_1 , в этой окрестности мы найдем еще одну точку последовательности x_2 и тд. Таким образом мы найдем, что точка a будет пределом подпоследовательности x_1, x_2, x_3, \dots

Точка будет пределом для подпоследовательности, так как начиная с какого-то номера все члены последовательности попадут в окрестности точки a , а вне окрестности будет конечное количество членов подпоследовательности.

