Задача 3. "Предел произведения равен произведению пределов", то есть если $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$, то $\lim a_n b_n$ существует и равен ab. Доказать.

СХОДЯЩАЯСЯ=>ОГР

Подсказка: При оценке разности $a_n b_n - ab$ полезно воспользоваться преобразованием:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a).$$

|x+y|<=|x|+|y|
|x*y|=|x|*|y|
|a_n|<=C

|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)=|<=
|a_n(b_n-b)| + |b(a_n-a)|=
|a_n|*|b_n-b| + |b|*|a_n-a|<=
|a_n|*e+|b|*e<=C*e+|b|*e=
e(C+|b|)=e*const

$\forall e > 0 \ \exists N(e) > 0 : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < e$

$\forall e > 0 \ \exists N(e) > 0 : \forall n > N \Rightarrow |b_n - b| < e$

$\forall e > 0 \ \exists N(e) > 0 : \forall n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| < e$ *const