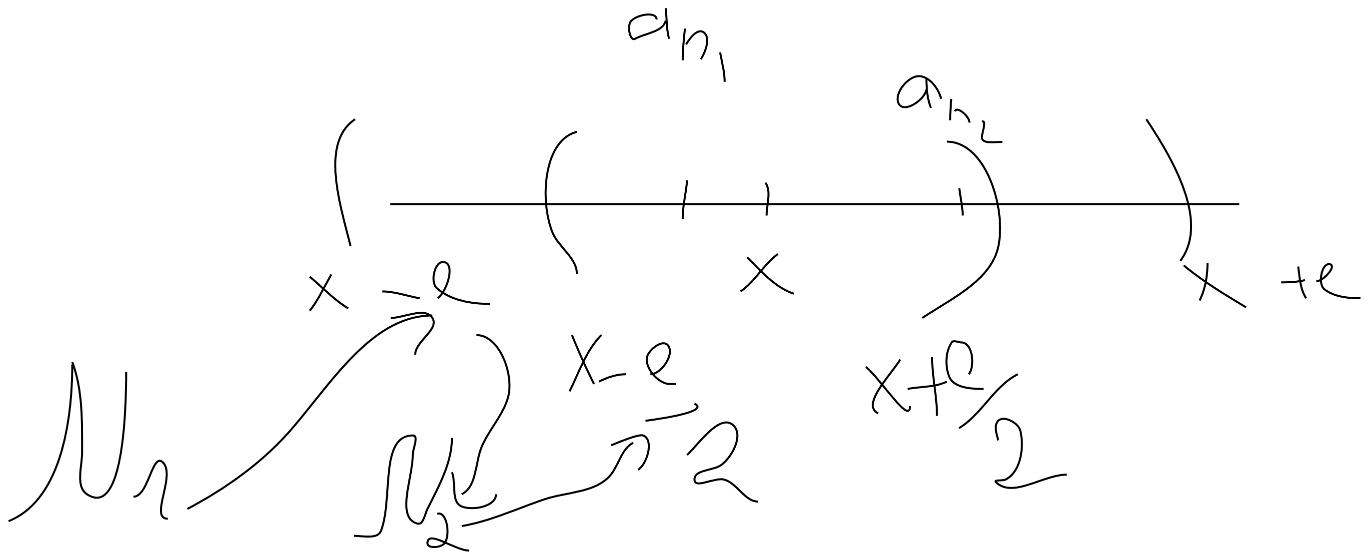
Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что из одновременного выполнения неравенств $n_1>N$ и $n_2>N$ следует неравенство $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.

Расстояние от an1 до an2 меньше e

Задача 6. Докажите, что всякая сходящаяся (имеющая предел) последовательность фундаментальна.

Задача 7 (Критерий Коши). Докажите, что последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.



Рассмотрим предел x для последовательности an и рассмотрим некоторую окрестность e этого предела, тогда для этой окрестности будет верно, что найдется номер N1, такой что для всех n>N1 an попадут в эту e окрестность. По числу e построим еще одну окрестность e/2. Тогда для e/2 найдется номер N2, такой что для всех n>N2 an попадут в эту e/2 окрестность. Возьмем для первоначальной e вместо N1 номер N2, тогда для первоначального e и для всех n>N2 an попадут в e/2 окрестность предела, а это значит, что расстояние от an1 до an2 меньше e внутри этой e/2 окрестности.

Докажем, что если последовательность фундаментальная тогда она сходится.
Произведем Дедекиндово сечение в области всех существенных чисел:
1)в нижний класс A- все такие числа y, что an>y начиная с некоторого номера
2)в верхний класс A'- все остальные

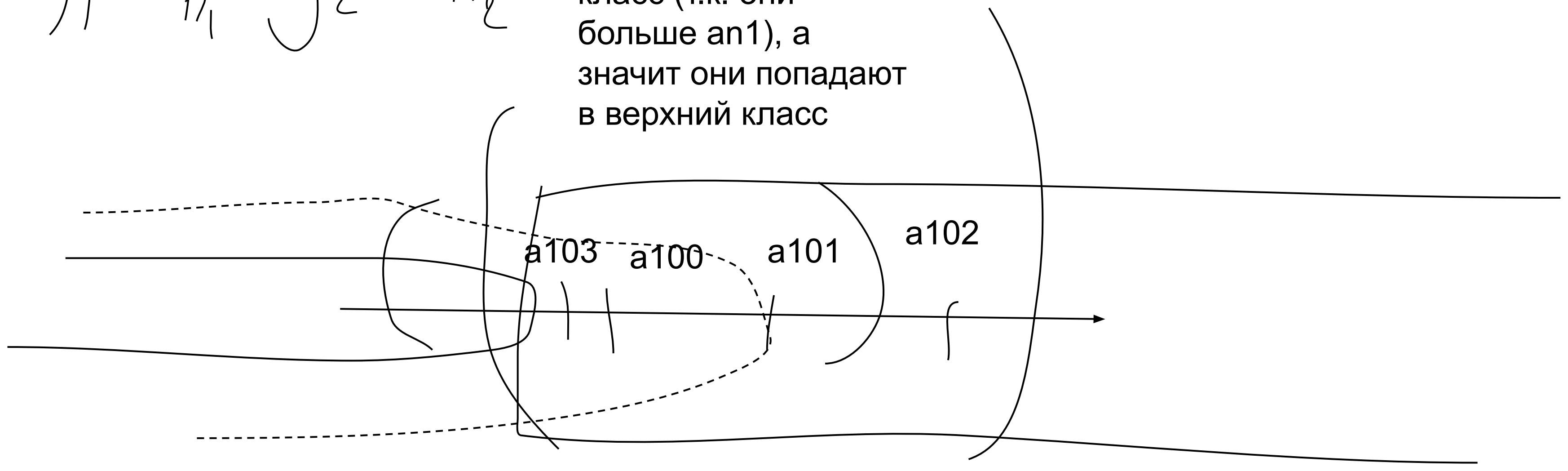
y_1 a_{n_1} y_2 a_{n_2}

для любого e найдется номер N, что для всех n1>N,n2>N |an1-an2|<e

an2-e< an1<an2+e

нижний класс A не пустой т к числа вида an2-e < an начиная с некоторого номера N

верхний класс A' не пустой, т.к числа вида an2+e не попадают в нижний класс (т.к. они больше an1), а значит они попадают в верхний класс



По теореме Дедекинда найдется секущее число x либо в верхнем либо в нижнем классе.

Докажем, что этот x будет пределом.

Т.к. x пограничное между классами, то x>an2-e и x<an2+e

для любого e найдется номер N, что для всех n2>N
an2-e< x<an2+e
А это и есть определение предела x для последовательности an