

3. Докажите, что из любой бесконечной последовательности действительных чисел можно выделить бесконечную монотонную (то есть неубывающую или невозрастающую) подпоследовательность.

Рассмотрим 2 случая

- 1) Последовательность ограниченная
- 2) Последовательность не ограниченная

1)

Если последовательность ограничена у нее есть предельная точка, тогда рассмотрим серию окрестностей этой предельной точки в каждую из которых попадет хотя бы один член из последовательности. Вокруг предельной точки накопится бесконечное количество членов последовательности (полученных из предыдущих серий окрестностей) либо с одной из ее сторон, либо с обеих ее сторон. Там где их будет бесконечно построим монотонную подпоследовательность.

2)

Если в неограниченной последовательности есть конечные предельные точки, то поступи с ними как в случае 1, если их нет, то бесконечная предельная точка точно есть, тогда рассмотрим серию окрестностей этой предельной точки. В каждой окрестности найдется хотя бы один член последовательности. Из этих членов последовательности мы составим монотонную подпоследовательность, так как они стремятся к бесконечности.

