

1. Верна ли теорема: "Если ряд $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$ сходится, то и ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится" ?

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Любой ряд -
последовательность сумм

$$y_1 = |a_1|$$

$$y_2 = |a_1| + |a_2|$$

$$y_3 = |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

$$y_p = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_p|$$

$$y_k = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_k|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$$

$$|a_{p+1} + \dots + a_k| \leq |a_{p+1}| + \dots + |a_k| < \epsilon$$

$$\Rightarrow$$

$$|a_{p+1} + \dots + a_k| < \epsilon$$

по условию послед-ть y_n сходится, а значит она фундаментальна

$$y_k - y_p = |a_{p+1}| + \dots + |a_k|$$

$$| |a_{p+1}| + \dots + |a_k| | < \epsilon$$

$$|a_{p+1}| + \dots + |a_k| < \epsilon - \text{ верно}$$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если для любого $\epsilon > 0$ существует число N такое, что из одновременного выполнения неравенств $n_1 > N$ и $n_2 > N$ следует неравенство $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$.

$p > N$ и $k > N$

$$|a_p - a_k| < \epsilon$$

Задача 6. Докажите, что всякая сходящаяся (имеющая предел) последовательность фундаментальна.

Задача 7 (Критерий Коши). Докажите, что последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

мы хотим доказать
фундаментальность послед-ти

$$x_1 = |a_1|$$

$$x_2 = |a_1| + |a_2|$$

$$x_3 = |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

$$x_p = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_p|$$

$$x_k = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_k|$$

что значит, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ фундаментальна?

$$|x_k - x_p| < \epsilon$$

$$|a_{p+1} + \dots + a_k| < \epsilon$$